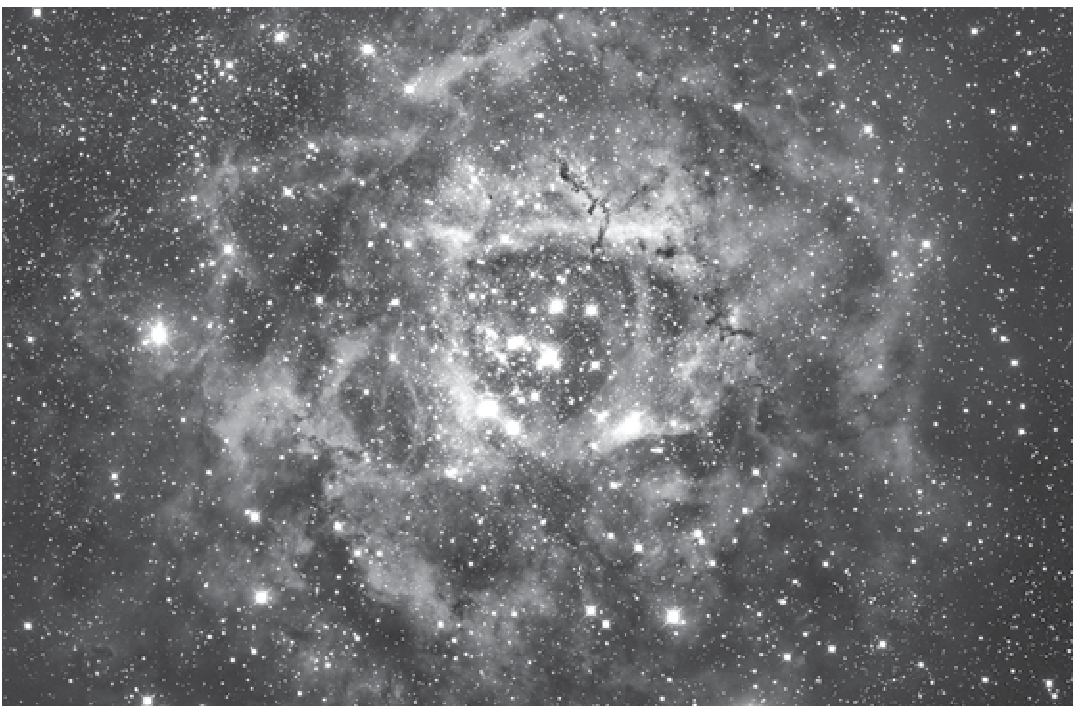
New Get Ahead

MATHEMATICS

8

Bilingual Teaching Guide

دو زبانی رہنمائے اساتذہ



Parveen Arif Ali

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

Contents

Introduction

Get Ahead Mathematics is a series of eight books from levels one to eight. The accompanying Teaching Guides contain guidelines for the teachers. The Teaching Guides, for Books 2 to 5, contain answers to the mathematical problems in the books.

The teachers should devise means and ways of reaching out to the students so that they have a thorough knowledge of the subject without getting bored.

The teachers must use their discretion in teaching a topic in a way they find appropriate, depending on the intelligence level as well as the academic standard of the class.

Encourage the students to relate examples to real things. Don't rush.

Allow time to respond to questions and discuss particular concepts.

Come well prepared to the class. Read the introduction to the topic to be taught in the pupils' book. Prepare charts if necessary. Practice diagrams to be drawn on the blackboard. Collect material relevant to the topic. Prepare short questions, homework, tests and assignments.

Before starting the lesson make a quick survey of the previous knowledge of the students, by asking them questions pertaining to the topic. Explain the concepts with worked examples on the board. The students should be encouraged to work independently, with useful suggestions from the teacher. Exercises at the end of each lesson should be divided between class work and homework. The lesson should conclude with a review of the concept that has been developed or with the work that has been discussed or accomplished.

Blackboard work is an important aspect of teaching mathematics. However, too much time should not be spent on it as the students lose interest. Charts can also be used to explain some concepts, as visual material helps students make mental pictures which are learnt quickly and can be recalled instantly.

Most of the work will be done in the exercise books. These should be carefully and neatly presented so that the processes can easily be seen.

The above guidelines for teachers will enable them to teach effectively and develop an interest in the subject.

These suggestions can only supplement and support the professional judgement of the teacher. In no way can they serve as a substitute for it. It is hoped that your interest in the subject together with the features of the book will provide students with more zest to learn mathematics and excel in the subject.

تعارف

Get Ahead Mathematics پہلی سے آٹھویں جماعت تک کے لیے 8 کتابوں کا سلسلہ ہے۔ منسلکہ رہنمائے اساتذہ میں اساتذہ کے لیے رہنما اصول دیے گئے ہیں۔ رہنمائے اساتذہ کلاس 5-2 میں کتاب میں موجود سوالات کے جوابات بھی مہیا کیے گئے ہیں۔

اساتذہ طلبا کو سمجھانے کے لیے وسیلے اور طریقے خود ہی وضع کریں تاکہ طلبا کسی اُکتاہٹ کے بغیر مضمون کی مکمل معلومات حاصل کرسکیں۔ اساتذہ کو کسی بھی موضوع کو پڑھاتے ہوئے ایسا طریقۂ کار اختیار کرنا چاہیے جسے وہ مناسب سمجھتے ہوں اور جو ذہانت کی سطح اور جماعت کے تعلیمی معیار کے مطابق ہو۔ اساتذہ حقیقی چیزوں سے مثالیں دینے میں طلبا کی ہمت افزائی کریں، جلدی نہ کریں۔ سوالات کے جوابات حاصل کرنے اور کسی مخصوص نقطۂ نظر پر بحث کے لیے وقت دیں۔ کمرۂ جماعت میں اچھی طرح تیار ہو کر آئیں۔ درسی کتاب کے کسی موضوع کو سکھانے سے پہلے اس کا مکمل طور پر تعارف کروائیں۔ اگر ضروری ہو تو اس کے لیے چارٹ بھی تیار کریں۔ تختۂ سیاہ پر مشق کے لیے اشکال بنائیں۔ موضوع سے متعلق مواد اکٹھا کریں۔ مختصر سوالات، گھر کا کام، امتحان اور مشق کا دیگر کام تیار رکھیں۔ کوئی سبق شروع کرنے سے پہلے طلبا کی گزشتہ معلومات کا ایک فوری جائزہ لیں جس کے لیے ان سے موضوع سے متعلق سوالات کریں۔ تختۂ سیاہ پر مشقوں کی مثالوں کے ذریعے تصورات کی وضاحت کریں۔ طلبا کو اپنا کام آزادی سے کرنے کا موقع دیں اور ساتھ ساتھ مفید مشورے بھی دیتے رہیں۔ ہر سبق کے آخر میں دی گئی مشقوں کو کلاس ورک اور ہوم ورک میں تقسیم کریں۔ کسی بھی سبق کا اختتام اس تصور کا جائزہ لیتے ہوئے کریں جو اس سبق کے مطالعے کے دوران پیدا ہوا یا جس کام پر بحث کی گئی یا جو مکمل کیا گیا۔

ریاضی پڑھانے کے لیے تختۂ سیاہ کی ایک خاص اہمیت ہے تاہم اس پر زیادہ وقت صرف نہ کیا جائے کیونکہ اس سے طلبا دلچسپی کھو دیتے ہیں۔ کچھ موضوعات کی وضاحت کے لیے چارٹ بھی استعمال کیے جا سکتے ہیں کیونکہ بصری مواد طلبا کو ذہنی تصویر بنانے میں مدد دیتا ہے جس سے وہ فوری طور پر سیکھ جاتے ہیں اور آسانی سے ذہن میں دہرا بھی لیتے ہیں۔

زیادہ تر کام مشقی کتابوں میں کیا جائے گا۔ انھیں احتیاط سے صاف ستھرا رکھنا چاہیے تاکہ طریقۂ کار آسانی سے دیکھ لیے جائیں۔

مندرجہ بالا رہنما اصول، اساتذہ کو مؤثر انداز میں سکھانے کے قابل بنائیں گے اور مضمون میں طلبا کی دلچسپی بڑھانے میں مدد کریں گے۔

یہ تجاویز، استاد کے پیشہ ورانہ فیصلے کے لیے محض ایک مدد اور اضافہ ہے وگرنہ یہ کسی بھی طرح استاد کا نعم البدل نہیں ہیں۔ امید ہے کہ مضمون میں آپ کی دلچسپی اور کتاب کی خصوصیات طلبا کو کو زیادہ محنت سے ریاضی سیکھنے اور مضمون میں مہارت حاصل کرنے میں مددگار ہوں گی۔

UNIT

1 Sets *(pages 1-18)*

Following are the basic information of sets.

Standard sets of numbers

Set of Natural numbers
N = {1, 2, 3, 4, ……}
Set of whole numbers
W = {0, 1, 2, 3, 4, ……}
Set of integers
Z = {…… 3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, ……}
Set of rational numbers
Q = {p/q / p and q $\in$Z and q#0}
Set of even numbers
E = {2, 4, 6, 8, ……}
Set of Odd numbers
O = {1, 3, 5, 7, ……}
Set of prime numbers
P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ……}

Subsets
A set P is a subset of a set Q if all the members of P are also the member of Q.
From the given standard sets we can say
N $\subset$W and W $\subset$ Z
N $\subset$ Z W $\subset$ Z
N $\subset$ Z

Power set

The power set is a set which contains all the possible subsets of the given set.

Consider the following set.

A = {1, 2, 3}

The power set of A is written as:

P(A) = all the possible subsets of A.
= [{ }, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {1, 3}, {1, 2, 3}]

The power set of A has 8 subsets.

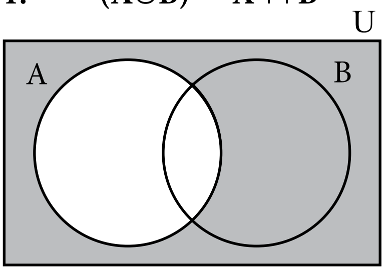
To find out the power set (number of subsets) of a given set, we can use the formula,

2^n (where **n** stands for the number of elements in the set).

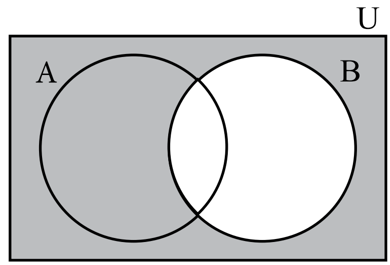
A = {1, 2, 3} (3 elements)
$P(A) = 2^n = 2^3 = 8$ subsets
B = {a, b, c, d} (4 elements)
$P(B) = 2^n = 2^4 = 16$ subsets.

De Morgan's Laws:
De Morgan's laws state that
(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
Verification of the laws are given on page 4 of the book.
Verification of De Morgan's Laws thought Venn diagram.
Let us take two sets A, B, and an universal set U. According to De Morgan's laws

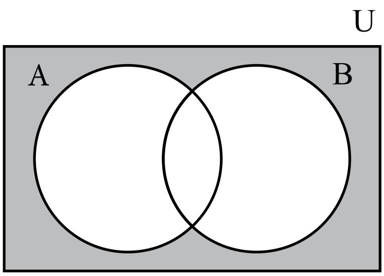
1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$



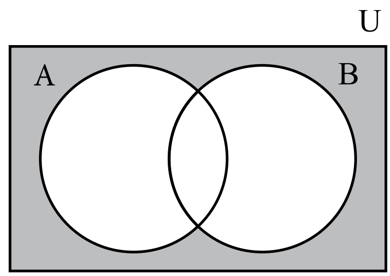
A'



B'

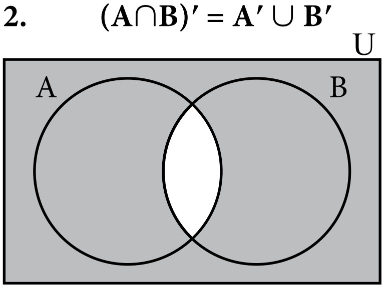


$(A \cup B)'$

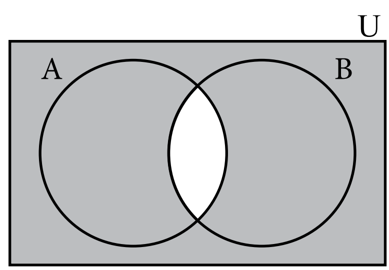


$A' \cap B'$

2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$



$(A \cap B)'$



$A' \cup B'$

UNIT

2 Rational and Irrational Numbers

(pages 19-24)

Rational Numbers

Natural numbers are the counting numbers (or positive integers). When we add two natural numbers the sum is always a natural number

$2 + 3 = 5$

When a natural number is subtracted from another natural number, the difference might not be a natural number

$2 - 4 = -2$, $5 - 5 = 0$

Thus arose the concept of whole numbers and negative integers.

0, −1, −2, −3, … But what happens when a natural number is divided by another natural number? $4 \div 2 = 2$.

$$3 \div 5 = \frac{3}{5}$$

In what system of numbers can we place $\frac{3}{5}$?

The numbers named by common fractions are part of a set of numbers, called 'rational numbers'. Thus $\frac{1}{2}, \frac{7}{6}, 5, \frac{3}{5}$ and 0 are all rational numbers.

The set of rational numbers contains the set of whole numbers as a subset. Thus we have enlarged the set of numbers that we can use.

We can define a rational number as: 'Any number which can be expressed in the form $\frac{p}{q}$, where p and q are integers and q is not equal to zero'.

Hence positive integers, negative integers, zero and common fractions belong to the system of rational numbers.

When we are given a fraction representing a rational number, we can always obtain a decimal numeral for the same number by dividing the numerator of the fraction by the denominator

$$\frac{1}{2} = 0.5\ , \quad \frac{3}{5} = 0.75\ , \quad \frac{12}{5} = 2.4$$

Sometimes, however, the division process has to be worked out by a long division

$\frac{23}{16} = 1.4375$

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

$$\begin{array}{r|l} & 1.4375 \\ \hline 16 & 23.0000 \\ & -16 \\ \hline & 70 \\ & -64 \\ \hline & 60 \\ & -48 \\ \hline & 120 \\ & -112 \\ \hline & 80 \\ & 80 \\ \hline & x \end{array}$$

For many rational numbers, the division process does not lead to a remainder 0

$\frac{103}{33} = 3.12\overline{12}\ldots,$

Where the $\overline{12}$ indicates that the block of digits '12' repeats indefinitely

In general we can say that every rational number can be represented either by a terminating decimal number or by a repeating decimal number.

Irrational Numbers

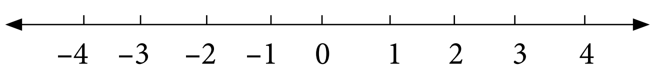
Look at the decimal expression:

0.535533555333

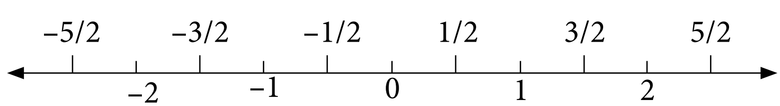
The digits after the decimal point are first one 5 and one 3, then two 5's and two 3's, and so on. It is neither terminating nor repeating. We know then, that it does not represent a rational number.

We can say that Irrational Numbers are numbers represented by non-terminating, non-repeating numerals e.g. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc. are irrational numbers. The positive square root of a counting number that is not a perfect square is an irrational number.

Rational numbers can be represented on a number line. Construct the number line with integers as follows:



Dividing the segment between each pair of consecutive integers into equal parts we get rational numbers.



Properties of Equality of Real Numbers

We use the sign = to show that two expressions have the same number. We will be using the following properties of equality for all real numbers a, b and c.

1. Reflexive property: $a = a$
2. Symmetric property: If $a = b$, then $b = a$
3. Transitive property: If $a = b$ and $b = c$, then $a = c$
4. Additive property: If $a = b$, then $a + c = b + c$
5. Multiplicative property

   If $a = b$, then $ac = bc$ and $ca = cb$
6. Cancellation property with respect to addition: if $a + c = b + c$ then $a = b$ and if $c + a = c + b$ then $a = b$
7. Cancellation property with respect to multiplication: $ac = bc$ then $a = b$ and $ca = cb$ then $a = b$

Properties of Inequality

For all real numbers a, b and c.

1. Trichotomy property

   Either $a < b$ or $a = b$ or $a > b$
2. Transitive property

   If $a > b$ and $b > c$ then $a > c$

   If $a < b$ and $b < c$ then $a < c$
3. Additive property

   If $a > b$ then $a + c > b + c$

   If $a < b$ then $a + c < b + c$ and $c + a < c + b$
4. Multiplicative property

   If $c > 0$ and $a > b$ then $ac > bc$ and $ca > cb$

   If $a < b$ then $ac < bc$ and $ca < cb$

   If $c < 0$ i.e., 'c' is a negative integer, and if $a > b$ then $ac < bc$ and $ca < cb$

   If $a < b$ then $ac > bc$ and $ca > cb$
5. Cancellation property with respect to addition

   If $a + c > b + c$ then $a > b$

   If $c + a > c + b$ then $a > b$

   If $a + c < b + c$ then $a < b$

   If $c + a < c + b$ then $a < b$

6. Cancellation property with respect to multiplication

   If $c > 0$

   If $ac > bc$ then $a > b$

   If $ca > cb$ then $a > b$

   If $ac < bc$ then $a < b$

   If $ca < cb$ then $a < b$

   If $c < 0$

   If $ac > bc$ then $a < b$

   If $ca > cb$ then $a < b$

   If $ac < bc$ then $a > b$

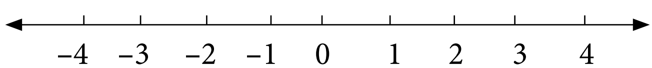
   If $ca < cb$ then $a > b$

Verify by substituting the values of $a = 1$, $b = 2$ and $c = 3$

In the above, equalities prove the properties. The pupils do not need to learn them, but as you proceed to solve equations and inequations the properties can be referred to as required.

Inequations

Look at the number line.



A number line indicates order relations among real numbers.

For example –4 is less than 2

4 is greater than –1

The sentence: $-3 < x < 2$ means that ‘x’ denotes a number between –3 and 2.

We can read the sentence as:

‘x is greater than –3 and less than 2’.

The same comparison is stated in the sentence: $2 > x > -3$.

Here are three inequalities:

$-2 < 0$ $\qquad$ $4x - 3 > 2$ $\qquad$ $y + 7 < 9$

An inequality is formed by placing an inequality symbol (<, >) between numerical or variable expressions called the ‘sides’ of the inequality.

An inequality containing a variable is called an ‘open sentence’

For example $5x - 1 < 9$

We can solve such an inequality by finding the value of the variable for which the inequality is a true statement. Such values are called 'solutions of the inequality'. They make up the 'solution set of the inequality'

If a = {−1, 0, 1, 2, 3, 4}, what is the solution set of $a + 7 < 9$?

Replace 'a' with each of its values in turn:

$a + 7 < 9$

$-1 + 7 < 9$ (true)

$0 + 7 < 9$ (true)

$1 + 7 < 9$ (true)

$2 + 7 < 9$ (false)

$3 + 7 < 9$ (false)

$4 + 7 < 9$ (false)

Therefore the solution set is: {−1, 0, 1}

Example: by using properties of inequalities, find the solution set of

$7x - 10 < x + 8$ where $x \in N$ (x is a natural number)

$7x - 10 + 10 < x + 8 + 10$ (additive property)

$7x - x < x + 18 - x$ (cancellation property with respect to addition)

$7x - x < + 18$

$6x < 18$

$\frac{6x}{6} < \frac{18}{6}$ (cancellation property with respect to multiplication)

$x < 3$

This means that $7x - 10 < x + 8$ is true for all those values of 'x' which are natural numbers less than 3.

As 1 and 2 are the natural numbers less than 3, the solution set is {1, 2}.

Squares and square Roots

(pages 25-34)

UNIT **3**

Squares

The square of a number is obtained by multiplying the number with itself.

Pattern followed by a square number

$2^2 = 1 + 2 + 1 = 4$

$3^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$

$4^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$

$5^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$

$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 100$

We have learnt that subtracting a number is the inverse of adding that number, and that dividing a non-zero number is the inverse of multiplying by that number. The inverse of squaring a number is finding a 'square root'.

If $a^2 = b$, then 'a' is called the square root of 'b'.

$8^2 = 64$ and $(-8)^2 = 64$ then +8 and −8 are the square roots of 64.

The symbol $\sqrt{\ }$ called the **radical** sign is used to denote the principal or non-negative square root of a positive number.

Thus $\sqrt{64} = 8$ and $-\sqrt{64} = -8$.

An expression written underneath the radical sign, such as 64, is called the **radicand**. Often it is convenient to use plus – or – minus notation (±) with radicals

For example $\pm\sqrt{64}$ means the positive or negative square root of 64.

It means that: $(\sqrt{a^2}) = a$

Zero has only one square root, namely zero itself, i.e. $\sqrt{0} = 0$.

The values of certain square roots can be seen at a glance, e.g. we may be able to find other square roots by expressing them as a product of square roots that are familiar to you

Examples:

Find $\sqrt{144} = \sqrt{9 \times 16} = 3 \times 4 = 12$

For any non-negative real numbers 'a' and 'b'.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Find $\sqrt{\dfrac{64}{16}} = \sqrt{\dfrac{64}{16}} = \dfrac{8}{4} = 2$

For any non-negative real number a and b

$$= \sqrt{\frac{a}{b}}$$

To find the square root of decimal fractions

Find the square root of 256.009. Count the digits after the decimal point. It is three which is an odd number. Add a zero to the extreme right to make pairs.

$\hat{2}\overline{56}.\overline{00}\overline{90}$

Follow the steps as explained for whole numbers keeping in mind that the decimal point is placed (in the quotient) as soon as the digits in the integral part are over, and the process is continued till the last pair after the decimal has been taken into consideration.

Find the positive square root of 126.1129

	11.23
1	$1\overline{26}.\ \overline{11}\ \overline{29}$
	−1
21	26
+1	− 21
222	511
+2	− 444
2243	6729
	− 6729
	x

Square Root of Common Fractions

If the numerator and denominator are perfect squares then extract their square roots separately and then solve the fraction obtained.

Find the square root of $\frac{4}{9}$

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0.666$

If both the numerator and denominator are not perfect squares then convert the common fraction into a decimal fraction and then find the square root of the number.

Find the square root of $\frac{3}{7}$

Changing $\frac{3}{7}$ into a decimal fraction

$\frac{3}{7} = 0.428571$

Finding the square root by the division method.

	0.654
6	$\hat{0}.\overline{42}\ \overline{85}\ \overline{71}$
+ 6	−36
125	685
+1	− 625
1304	6071
	− 5216

The square root of $\frac{3}{7}$ = 0.654 (up to 3 decimal places)

Square Root of Numbers which are not Perfect Squares

For numbers that are not perfect squares, we can find their square roots by the division method, up to a specific number of decimal places.

Find the square root of 2.

	1.4142
1	$\hat{2}.\overline{00},\overline{00},\overline{00},\overline{00}$
+ 1	−1
24	100
+ 4	− 96
281	400
+ 1	− 281
2824	11900
+ 4	−11296
28282	60400
+ 2	− 56564
	3836

$\sqrt{2} = 1.4142$

It must be remembered that irrational numbers, which cannot be written in the form of $\frac{p}{q}$ where 'p' and 'q' are integers and 'q' is not equal to zero cannot be converted into common fractions e.g. $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}$, etc.

The square roots of irrational numbers are found in the same way as for decimal fractions up to a specific number of decimal places.

UNIT 4

Cubes and Cube Roots

(pages 35-41)

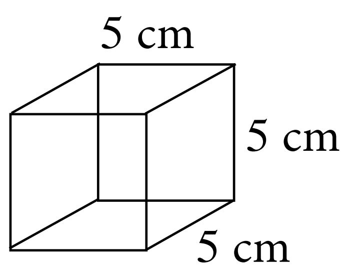
Perfect cubes are obtained by multiplying a number three times. $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$.
They have only three identical factors
$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

Properties of a cube

Cubes of

- even numbers are even
  $6^3 = 216$
- negative integers are negative
  $(-4)^3 = -64$
- natural numbers are of the same form
  $4^3 = 64 = 3 \times 21 + 1$
  $5^3 = 125 = 3 \times 41 + 2$
- positive integers are positive
  $7^3 = 343$
- odd numbers are odd
  $9^3 = 729$

Geometrically cubes are represented as



$5 \times 5 \times 5 = 125\ \text{cm}^3$

$$5 \underset{\text{cube root}}{\overset{\text{cube}}{\rightleftarrows}} 125$$

Cube root of a number is the factor multiplied by itself 3 times. Finding the cube root of a number is opposite of cubing a number.

Properties of cube roots

Cube root of

negative integers is negative

positive integers is positive

product of two integers
$\sqrt[3]{m \times n} = \sqrt[3]{m} \times \sqrt[3]{n}$

a number is expressed as $\sqrt[3]{\ }$

rational numbers
$\sqrt[3]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{q}}$

Activity 1:

- Take a cubic block with all sides equal
- Measure length, breadth and height.
- Find $l \times b \times h$ which will be a cubic number.

3 • Find the cube root of the obtained number.

Activity 2:

Copy the table on the board and call the students one by one to complete it.

n	n^3
9	
	729
	125
	8000
10	
11	

UNIT

5 Number system with base two, five, eight, and ten

(pages 42-54)

Base Two or Binary System

In the decimal system, we make use of the symbols 0, 1, 2, …9, together with their place values to represent a number. The symbols are known as digits. The value of the digit depends on its place within the number. Every digit has a value following a certain place value

For example 124 is a number with three digits — 1, 2 and 4. The value is one hundred and twenty four, which follows the place values 1 hundred, 2 tens and 4 units.

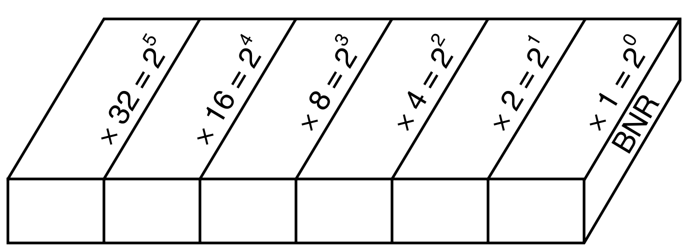
1	2	4
hundreds	tens	units
↕	↕	↕
1×100	2×10	4×1

i.e. $124 = (1 \times 100) + (2 \times 10) + (4 \times 1)$

We can see that in this system, the place a symbol occupies has a fixed value. All the place values in the decimal system are in terms of powers of ten. Therefore, the decimal system is also called the system to base 10. 0 is called a place holder. Thus, 240, 204 and 24, all have different values.

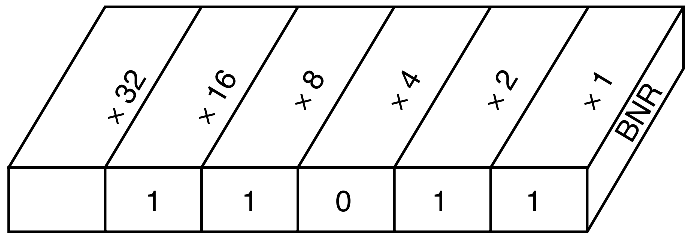
Another system of numbering where the place values are in terms of powers of two (i.e. counting in groups of two) is called the 'binary system', or 'base two system'. In the binary system we have units, twos, fours, eights, …etc. i.e. each place has a value two times the value of the place on the right. All the place values are in terms of powers of two.

We can use the 'binary number reader' to discover the base ten value of base two numerals.



We enter the base two number into the binary number reader and multiply and add.

To change 11011 in the base two system to the base ten value, we enter the base two number in the Binary Number Reader.



Multiply $1 \times 16 = 16$

$1 \times \ \ 8 = 8$

$0 \times \ \ 4 = 0$

$1 \times \ \ 2 = 2$

$1 \times \ \ 1 = 1$

Now add: $16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27$

The base of the system is often written below the number to avoid confusion

$11011_2 = 27_{10}$

Note that here 0 is a place holder.

Make the pupils practice writing numbers from 1 to 12 in the binary system as compared to those in the decimal system.

Base 2 Number	Base 10 Number
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12

101 is different from 110 and 011. Stress importance of ‘0’ as place holder.

Base Five Number System

In this system, a number is expressed in terms of powers of 5 or as the sum of multiples of 5. In the base five system, five symbols are used which are:

0, 1, 2, 3, 4.

Write the base five numbers and their equivalent base ten numbers.

Base 5 number	Base 10 number
1	1
2	2
3	3
4	4
10	5
11	6
12	7
13	8
14	9
20	10

Conversion of Decimal System to Base Two System

To change any decimal number (base 10) into a binary number, we carry out successive divisions of the decimal number by '2' and write the remainder after each division next to the quotient. We carry out the divisions until we get '0' or '1' as the remainder. The binary number is found by writing the remainders starting from the bottom to the top

Convert 23_{10} to the base two system, dividing each quotient by 2.

2	23	Remainder
2	11	—1
2	5	—1
2	2	—1
2	1	—0
2	0	—1

The required binary number is:

$23_{10} = 10111_2$

Conversion of Binary Numbers into Base Ten

We can use the place value property by which a binary number can be changed easily into a base ten number

Convert 111_2 into the decimal system:

111_2 consists of 3 digits.

The place value of binary numbers are: 2^2 2^1 2^0

The binary number 111_2 can be written by multiplying each digit, starting from the right with the increasing power of 2.

Place value	2^2	2^1	2^0
Numbers	1	1	1

$$
\begin{aligned}
111_2 &= 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
&= 4 + 2 + 1 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Conversion of Decimal System to base 8 system.

Example:
Convert 5890_{10} to base 8 system.

$$
\begin{array}{r|l l}
8 & 5890 & \text{Remainder} \\
\hline
8 & 736 & —2 \uparrow \\
\hline
8 & 92 & —0 \\
\hline
8 & 11 & —4 \\
\hline
8 & 1 & —3 \\
\hline
8 & 0 & —1
\end{array}
$$

$5890_{10} = 134\ 02_8$

Conversion of base 8 number to decimal system

$1340_{28} = (1\times8^4) + (3\times8^3) + (4\times8^2) + (0\times8^1) + (2\times8^0)$

$= \quad 4096 + 1536 + 256 + 0 + 2$

$= \quad 5890_{10}$

Operations on Binary Numbers

Addition:

Binary Numbers can be added in columns as we add decimal numbers.

$$
\begin{array}{r}
0 \\
+\ 0 \\
\hline
0_2 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0 \\
+\ 1 \\
\hline
1_2 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
1 \\
+\ 0 \\
\hline
1_2 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1 \\
+\ 1 \\
\hline
10_2 \\
\hline
\end{array}
$$

In the binary system '2' is written 10_2. So when adding binary numbers every time we get a '2' we change it into 10_2. We write '0' in the units column and carry '1' to the next column

Add: $\begin{array}{r} 101_2 \\ +\ 10_2 \\ \hline 111_2 \\ \hline \end{array}$

Add: $\begin{array}{r} 101_2 \\ +\ 1001_2 \\ \hline 1110_2 \\ \hline \end{array}$

Add: $\begin{array}{r} 101_2 \\ +\ 101_2 \\ \hline 1010_2 \\ \hline \end{array}$

Subtraction of Binary Numbers
Binary numbers can be subtracted in column form as we subtract decimal numbers.

$\begin{array}{r} 0 \\ -\ 0 \\ \hline 0_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ -\ 0 \\ \hline 1_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ -\ 1 \\ \hline 0_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ -\ 1 \\ \hline 1_2 \\ \hline \end{array}$

Carry out the following subtractions to explain subtraction in the binary system
Subtract.

1. $\begin{array}{r} 110 \\ -\ 101_2 \\ \hline 001 \\ \hline \end{array}$ (1 cannot be subtracted from 0 so borrow a 2 from the next column and subtract 1 from 2)

2. $\begin{array}{r} 101_2 \\ -\ 11_2 \\ \hline 10_2 \\ \hline \end{array}$

Answers of the subtractions can be checked by changing them into the decimal system

$\begin{array}{r} 110_2 \\ -\ 101_2 \\ \hline 001_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6_{10} \\ -\ 5_{10} \\ \hline 1_{10} \\ \hline \end{array}$

When simplifying sums having addition and subtraction signs follow the DMAS Rule i.e. add first and then subtract.

Multiplication of Binary Numbers

The multiplication of ‘0’ and ‘1’ in the binary system is the same as in the decimal system

$0 \times 0 = 0$
$1 \times 0 = 0$
$0 \times 0 = 0$
$1 \times 1 = 1$

Therefore multiplication is done in the same way as in the decimal system

Find the product of 110_2 and 11_2

$$\begin{array}{r} 110_2 \\ \times 11_2 \\ \hline 110_2 \\ 110_2 \\ \hline 10010_2 \\ \hline \end{array}$$

To check the answers change the binary numbers into decimals.

$$\begin{array}{r} 110_2 \\ \times 11_2 \\ \hline 110\ (=6) \\ 1100\ (=12) \\ \hline 10010_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6_{10} \\ 3_{10} \\ \hline 18_{10} \\ \hline \end{array}$$

Conversion of the Decimal System to the Base Five System

To change a base 10 number into a base five number we use the division method with the successive remainders in the same way as we did for binary numbers. The division continues till we get the quotient less than five. Example 47_{10} to base five.

		Remainder
5	47	
5	9	—2 ↑
5	1	—4
5	0	—1

The answer is 142_5.

OXFORD UNIVERSITY PRESS

Conversion of the Base Five System into the Decimal System

To change a base five number into a decimal number, we multiply the number with the respective powers of 5 according to its position and then find the sum

Convert 24_5 to base 10.

$(2 \times 5) + (4 \times 5^{\circ})$ (multiplying by the powers of 5)

$10 + (4 \times 1)$

$10 + 4$

$=14_{10}$

Multiplication with Base Five

We can find the product of numbers in the base five system as following.

Multiply: 342_5 and 32_5

$$\begin{array}{r} 342_5 \\ \underline{\times \quad 32_5} \\ 1234_5 \\ \underline{+\ 21310_5} \\ \underline{23044_5} \end{array}$$

Operations of Numbers with Different Bases

Before simplifying the expression we have to convert all the numbers to the same base system. It is easier if we convert all of them to the decimal or base 10 system

$110111_2 + 21413_5 + 457_{10}$

Changing to the base 10 system:

$110111_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^{\circ}$

$= 32 + 16 + 0 + 4 + 2 + 1$

$= 55_{10}$

$21413_5 = 2 \times 5^4 + 1 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 3 \times 5^{\circ}$

$= 1250 + 125 + 100 + 5 + 3$

$= 1483_{10}$

$= 110111_2 + 21413_5 + 457_{10}$

$= 55_{10} + 1483_{10} + 457_{10}$

$= 1995_{10}$

Simplify $360_{10} - 231_5 - 1111_2$

Changing the numbers to the base 10.

$231_5 \quad = 50 + 15 + 1 = 66_{10}$

$1111_2 \quad = 8 + 4 + 2 + 1 = 15_{10}$

$= 360_{10} — 231_5 - 1111_2$

$= 360_{10} - 66_{10} - 15_{10}$

$= 360_{10} - 81_{10}$

$= 279_{10}$

We can find the product of numbers given in different bases by changing them into the same base 10.

Simplify

$241_5 \times 1011_2$

Changing the numbers to base 10.

$241_5 \quad = 50 + 20 + 1 = 71_{10}$

$1011_2 \quad = 8 + 0 + 2 + 1 = 11_{10}$

$= 241_5 \times 1011_2$

$= 71_{10} \times 11_{10}$

$= 781_{10}$

UNIT

6 Compound Proportion

(pages 55-59)

Another kind of proportion in which more than two ratios are involved is called a **compound proportion.**

To solve a compound proportion we can split it into two or more simple ratios.

Example:
If 14 men can do a job in 8 days working 5 hours a day, how many hours a day must 35 men work to complete it in 4 days?

Reasoning: less men more days; less hours more days.

The proportion between men and days is inverse, and the proportion between hours and days is also inverse.

(Keep the quantity to be found in the middle.)

men	:	hours	:	days	
14	$\longrightarrow$	5	$\longrightarrow$	8	(inverse)
35	$\longrightarrow$	x	$\longrightarrow$	4	(inverse)

We multiply as shown by the arrows.

$$35 \times 4 \times x = 14 \times 5 \times 8$$

$$\frac{35 \times 4 \times x}{35 \times 4} = \frac{14 \times 5 \times 8}{35 \times 4}$$

$x = 4$ hours

More men working less days will work less hours a day

Example:
30 men are employed to complete a job in 8 days, but only $\frac{1}{3}$ of the work was completed in 3 days. Find out how many more men should be employed to complete the work in time.

work	:	men	:	days
$\frac{1}{3}$	:	30	:	3
$\frac{2}{3}$	:	x	:	5

Reasoning: More men less days, less work less men.

The proportion is direct between work and days.

The proportion is inverse between men and days.

$$\begin{array}{ccccc} \text{work} & : & \text{men} & : & \text{days} \\ \frac{1}{3} & & 30 & \longrightarrow & 3 \\ \frac{2}{3} & & x & \longrightarrow & 5 \end{array}$$

(direct proportion) (inverse proportion)

$\frac{1}{3} \times x \times 5 \quad = \frac{2}{3} \times 30 \times 3$ (following the arrows)

$\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} \times x = \frac{2 \times 3 \times 30 \times 3}{3 \times 5}$

$x = 36$

$36 - 30 = 6$ i.e. 6 more men should be employed.

UNIT

7

Banking *(pages 60-66)*

Banking is the business activity regarding money.

Services provided by the banks:

- Checking accounts
- Cheque books
- Saving accounts
- Certificate of deposits
- Debit cards
- Mutual funds
- Personal loans
- Automated Teller Machine (ATM)
- Transactional Account
- Online banking
- Currency conversions
- Overdraft
- Leasing
- Demand finance

Instruments used in banking:

- cheques
- pay order
- demand draft
- deposit slip
- voucher

Banking Activity

Prepare this activity for morning presentation.

Call a banker (some parent working in bank). Request him/her to bring some bank instruments like cheque book, deposit slip, account opening forms etc. The presentor will explain the different procedures and daily activities going on in a bank. There are separate bank accounts for minors, he/she will explain the procedure to open their accounts emphasizing that saving is a good habit.

This activity can be an interactive session between the banker and the students.

If time permits, a role play related to the topic can be presented.

Next day, distribute a worksheet to the class with related multiple choice questions.

Percentage, Insurance, and Taxation

UNIT **8**

(pages 67-80)

The ratio of one number to another can be expressed as a percent. The word 'percent' (denoted by '%') means 'hundredth' or divided by 100

For example $\frac{29}{100}$ is called 29 percent and written as 29%.

We can express one quantity as a percent of another quantity

Express 3 as a percentage of 5

$\frac{3}{5}$ of 100

$= \frac{3}{5} \times 100 = \frac{300}{5} = 60\%$

This means that 3 is 60 % of 5.

Application of Percentage

Percentage is widely used because of its application in calculating zakat, commission, discount, taxes, etc.

Profit and Loss

Cost price is the actual price of an article. Selling price is the price at which it is sold.

If the selling price is higher than the cost price, the shopkeeper has made a profit.

For example:

Cost price is Rs 50

Selling price is Rs 60

Profit is 60 – 50 = Rs 10

Cost price Rs 50

Selling price Rs 40

Loss is 50 – 40 = Rs 10

To express the profit or loss in terms of percentage:

CP = 50

SP = 60

Profit = 60 – 50 = 10

The profit on CP (Rs 50) is Rs 10

The profit on Rs 100 would be $\frac{10}{50} \times 100 = 20\%$

CP = Rs 50

SP = Rs 40

Loss = 50 – 40 = 10

The loss on CP (Rs 50) is Rs 10. The loss on CP (Re 1) is $\frac{10}{50}$.
The loss on Rs 100 would be $\frac{10}{50} \times 100 = 20\%$
Note: The profit or loss percent is always calculated on the cost price.

Insurance

To protect a house, a car or other expensive items from loss or damage a person can have them insured. He pays a certain sum called 'premium', to an Insurance Company. This sum is calculated at a certain percentage of the total cost of the items. This percentage is called 'rate of the premium'.

To find the premium:
A man insures his life for Rs 500,000. What is the annual premium he has to pay at the rate of $2\frac{1}{2}\%$?
On Rs 100 he has to pay Rs 2.50 premium.
On Rs 500,000 he has to pay $\frac{2.50}{100} \times 500{,}000$
Annual premium = Rs 12,500.

To find the rate of the premium:

A man insures his life for Rs 450,000 and pays an annual premium of Rs 13,500. Find the rate of the premium.

On Rs 450,000 he pays Rs 13,500.

On Rs 100 he pays $\frac{13{,}500}{450{,}000} \times 100 =$ Rs 3

So his premium rate is 3%.

Income Tax

All the money a person earns in a year is called his 'gross - income'.

A part of the gross income which is paid to the government is called income tax. The remaining amount is called 'net-income'.

Make a table of the rate of **income tax** deductions on various amounts of income and display it in the class during the course of the lesson. **Rebate** is a % reduction in tax liability.

Income Tax Slabs 2018–2019

Salary per annum		Income tax rate
1.	Up to Rs. 1,200,000	0%
2.	Rs. 1,200,001 to 2,400,000	5%
3.	Rs. 2,400,001 to 4,800,000	10%
4.	Rs. 4,800,001 and above	15%

To find the tax payable

Example:
The annual income of a person is Rs 1,355,000. Find the income tax due on him.

Total income = Rs 1,355,000
Amount exceeding Rs 1,200, 000 = Rs 1,355,000

$$\begin{array}{r} \text{Rs } 1{,}355{,}000 \\ \underline{-\text{Rs } 1{,}200{,}000} \\ \text{Rs } 155{,}000 \end{array}$$

Since his income does not exceed Rs 2,400,000,
the rate of income tax will be 5%.

Income tax on Rs 155,000 will be: $\frac{5}{100} \times 155{,}000 = \text{Rs } 7750$

UNIT

9 Algebra: Polynomials

(pages 81-84)

Addition and Subtraction of Polynomials

To add two polynomials, we write the sum and simplify by adding similar or like terms. It is also convenient to arrange the expressions in ascending or descending order.

Add:

$3x - 2x^3 + 3x^2 - 4$ and $6x + 7 + 2x^3 - 5x^2$

Arranging the expressions in descending order of x, and writing them in vertical form.

$$\begin{array}{r}
-\cancel{2x^3} + 3x^2 + 3x - 4 \\
\cancel{2x^3} - 5x^2 + 6x + 7 \\
\hline
-2x^2 + 9x + 3 \\
\hline
\end{array}$$

Subtracting polynomials is very much like subtracting real numbers. To subtract a number we add the opposite of that number. To subtract a polynomial we add the opposite of each term of the polynomial and then simplify.

Example:

Subtract $3x^4 - 5x^2 + 5x - 3$ from $8x^4 - 3x^2 + 4x - 6$

Writing the expressions in vertical form:

$$\begin{array}{l}
\quad 8x^4 - 3x^2 + 4x - 6 \\
\pm\ 3x^4 \mp 5x^2 \pm 5x \mp 3 \text{ (changing to the opposite)} \\
\hline
\quad 5x^4 + 2x^2 - x - 3 \\
\hline
\end{array}$$

Multiplication of Polynomials

When we multiply two powers having the same base, we add the exponents as shown below:

$x^2 \times x^5 = x^{2+5} = x^7$

Example:

Multiply $3x^2 + 2x - 4$ by $2x^2 - 4x + 5$

Arrange the expressions in vertical form.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 3x^2 & +\ 2x & -\ 4 & & \\
\times & 2x^2 & -\ 4x & +\ 5 & & \\
\hline
 & 6x^4 & +\ 4x^3 & -\ 8x^2 & & \\
 & & -\ 12x^3 & -\ 8x^2 & +\ 16x & \\
 & & & +\ 15x^2 & +\ 10x & -\ 20 \\
\hline
 & 6x^4 & -\ 8x^3 & -x^2 & +\ 26x & -\ 20 \\
\hline
\end{array}$$

Division of Polynomials

Division of one polynomial by another is very much like ordinary long division. When we divide polynomials we should make sure that the terms in each polynomial are arranged in order of decreasing degree in the variable. The division process ends when the remainder is either zero or of a lesser degree than the divisor

For example:
Divide $8x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 22x - 15$ by $4x^2 + 2x - 3$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 4x + 5 \\
\hline
4x^2 + 2x - 3 & 8x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 22x - 15 \\
 & \pm 8x^4 \pm 4x^3 \mp 6x^2 \\
\cline{2-2}
 & -16x^3 + 12x^2 + 22x - 15 \\
 & \mp 16x^3 \mp 8x^2 \pm 12x \\
\cline{2-2}
 & +20x^2 + 10x - 15 \\
 & \pm 20x^2 \pm 10x \mp 15 \\
\cline{2-2}
 & x
\end{array}
$$

The quotient is $2x^2 - 4x + 5$.

Simplifying Algebraic Expressions

The following types of brackets are used in algebra:

( ): simple brackets or parenthesis

{ }: curly brackets or braces

[ ] : square brackets

— : vinculum

When brackets occur in an algebraic expression, start simplifying with the vinculum first.

The other brackets should be removed in the order: parenthesis, braces and then square brackets.

If there is a number just before the bracket, then all the terms inside the brackets should be multiplied by that number.

If a negative sign occurs before the bracket then the signs of all the terms within the brackets will change.

The expressions within a bracket should be simplified according to the DMAS rule. i.e. division first, then multiplication, then addition and last of all subtraction.

Example:

Simplify:

$2x - [x - \{3x - (x - \overline{2y - 1})\}]$

$2x - [x - \{3x - (x - 2y + 1)\}]$ removing the vinculum

$2x - [x - \{3x - x + 2y - 1\}]$ removing the parenthesis

$2x - [x - 3x + x - 2y + 1]$ removing the braces

$2x - x + 3x + x \mp 2y - 1$ solving the like terms

$3x + 2y - 1$

Factorisation *(pages 85-109)*

When we write:
$72 = 9 \times 8$ or $72 = (2)(36)$

we have factorized 72.

In the first case the factors are 9 and 8.

In the second case they are 2 and 36.

In algebra we factorize a polynomial by expressing it as a product of other polynomials.

We can use division to test for factors of a polynomial

Example:

$bx + by$

Dividing both terms by b

$\frac{bx}{b} + \frac{by}{b}$
$= (x + y)$

Multiplying $x + y$ by b we get $bx + by$.

So the factors of $bx + by$ are b and $(x + y)$.

Factorisation of an expression of the type: ka + kb + kc

k is a common factor of all the terms in the expression so (k) and $(a + b + c)$ are the factors of $ka + kb + kc$.

Example:

- Factorize $8cx + 10cy + 12cz$

2c is the common factor of the term in the expression.

Dividing each term by 2c we get:

$\frac{8cx}{2c} + \frac{10cy}{2c} + \frac{12cz}{2c}$
$= (4x + 5y + 6z)$

The factors of the expression are:

2c and $(4x + 5y + 6z)$

- Factorize $8a^3bcx + 16a^2b^2c^2y$

The common factor in both terms is $8a^2bc$.
Dividing each term by $8a^2bc$

$$\frac{8a^3\,bcx}{8a^2\,bc} + \frac{16a^2\,b^2\,c^2\,y}{8a^2\,bc} = ax + 2bcy$$

The factors of the expression are:

$8a^2bc$ and $(ax + 2bcy)$.

- Factorize $ax + ay + bx + by$.

Grouping two terms together

$(ax + ay) + (bx + by) =$

$a(x + y) + b(x + y)$

$= (x + y)(a + b)$

Now take $(x + y)$ as a common factor

The factors are: $(a + b)$ and $(x + y)$

$(a + b)(x + y)$

$= ax + ay + bx + by$

Sometimes the terms have to be arranged in order to factorize them easily

- Factorize: $axy - bcz + bcxy - az$.

Rearranging the terms:

$axy + bcxy - az - bcz$

Grouping the terms:

$(axy + bcxy) - (az + bcz)$

Finding the common factors

$xy(a + bc) - z(a + bc) = (a + bc)(xy - z)$

The factors are $(xy - z)$ and $(a + bc)$.

Factorisation of an expression of the type $a^2 \pm 2ab + b^2$

The symmetry property of equality enables us to rewrite the formulas for squaring a binomial in a form useful for factorisation.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

The expressions on the left sides of the equations are called 'trinomial squares', or 'perfect squares' since each expression has three terms and is the square of a binomial.

To determine whether or not a trinomial is a trinomial square ask the following questions.

Is the first term a square?

Is the last term a square?

Is the middle term twice the product of the square roots of the first and last terms?

Examples:

- Is $81x^2 + 90xy + 25y^2$ a trinomial square?

The first term $81x^2$ is the square of $9x$.

The last term $25y^2$ is the square of $5y$.

The middle term $90xy$ is twice the product of the square roots of $81x^2$ and $25y^2$.

Thus $81x^2 + 9xy + 25y^2$ is a perfect square.

- Is $100c^2 + 30cd + 9d^2$ a perfect square?

  $\sqrt{100c^2} = 10c, \sqrt{9d^2} = 3cd$

But $2(10c)(3d) = 60cd \neq 30cd$.

$(10c + 3d)^2 = (10c)^2 + 2(10c)(3d) + (3d)^2$

$= 100c^2 + 60cd + 9d^2$

Thus $100c^2+30cd+9d^2$ is not a perfect square, because the middle term should have been 60cd not 30cd.

Factorisation of an expression of the type $ax^2 + bx + c$

The technique for factorizing polynomials of the type $ax^2 + bx + c$ is as follows:

1. List the pairs of factors that have a product equal to the constant term.
2. Find the pair of factors in the list that have a sum equal to the coefficient of the middle term.

Examples:

- Factorize $x^2 + 5x + 6$

  $2 \times 3 = 6$

  $1 \times 6 = 6$

1. Since the coefficient of the middle term is 5, which is positive, list the pairs of positive factors of 6.
2. Find the factors that have a sum of 5 i.e. $(2 + 3 = 5)$
3. Rewrite $x^2 + 5x + 6$ as

   $x^2 + 3x + 2x + 6$

   $= (x^2 + 3x) + (2x + 6)$

   $= x(x + 3) + 2(x + 3)$

   $= (x + 3)(x + 2)$

- Factorize $x^2 - 5x + 6$

1. Since $-5 < 0$, think of the negative factors of 6.
2. Select the factors of 6 with the sum -5 i.e. -2 and -3.
3. Rewrite $x^2 - 5x + 6$ as

$= x^2 - 3x - 2x + 6$

$= x(x - 3) - (2x - 6)$

$= x(x - 3) - 2(x - 3)$

$= (x - 2)(x - 3)$

- Factorize $x^2 + x - 6$

  Factors of -6 are 3 and -2

  $3 + (-2) = 1$

$= x^2 + 3x - 2x - 6$

$= (x^2 + 3x) - (2x + 6)$

$= x(x + 3) - 2(x + 3)$

$= (x + 3)(x - 2)$

- Factorize $x^2 + x - 6$

  $x^2 + x - 6$

$= x^2 + 3x - 2x - 6$

$= (x^2 + 3x) - (2x + 6)$

$= x(x + 3) - 2(x + 3)$

$= (x + 3)(x - 2)$

It must be noted that all rules of addition and multiplication are taken into consideration when factorizing trinomials.

Cubes of sum and difference

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

Simple Equations

Look at the following equations:

$10 - 4 = 6$, $5x - 1 = 9$, $a + 3 = 3 + a$

An equation is formed by placing an 'equals sign' (i.e. '=') between two numerical or variable expressions called the 'sides' of the equation.

Sentences containing variables like the equation $5x - 1 = 9$ and $a + 3 = 3 + a$ are called 'open sentences'.

When we replace each variable in an open sentence by a number we obtain a statement which may be true or false.

Examples:

- Find the value of x for which $5x - 1 = 9$ becomes a true statement.

Replace x by 1, 2 & 3.

$5x - 1 = 9$

$5(1) - 1 = 9$ (False)

$5(2) - 1 = 9$ (True)

$5(3) - 1 = 9$ (False)

Therefore the required value of x is 2. Any value of a variable that converts an open sentence into a true statement is called a 'solution' of the sentence. It 'satisfies' the sentence.

The set of all solutions of an open sentence is called the 'solution set', of the sentence. Finding the solution set is called 'solving' the sentence. We may use braces to show a solution set. Thus for the above example we may say either.

'The solution is 2'

or

'The solution set = {2}'

Examples:

- Solve $x + 3 = 9$

$x + 3 = 9$

$x + 3 - 3 = 9 - 3$ (adding -3 the opposite of $+3$ to both sides)

$x = 6$ (additive property of equality)

The solution set is {6}

- Solve $x - 8 = 6$

$x - 8 = 6$

$x - 8 + 8 = 6 + 8$ (adding $+8$ to both sides)

$x - \{14\}$ (additive property of equality)

The solution set = {14}

Use of Equations in Problems

The skill we have gained in solving equations can often help us to solve word problems.

For solving a word problem follow the steps carefully:

1. Read the problem carefully a few times. Decide what numbers are asked for and what information is given. Making a sketch may be useful.
2. Choose a variable and use it with the given facts to represent the number described in the problem.
3. Reread the problem. Then write an open sentence that represents the relationships among the numbers in the problem.
4. Solve the open sentence and find the required number(s).
5. Check your results with the words of the problem. Give the answer.

UNIT

11 Simultaneous linear equations

(pages 110-122)

Equations in the same variables form or in a system of equations and are called **simultaneous equations.**

A solution of simultaneous equations in two variables is an ordered pair of numbers that satisfies each of the equations.

Example

$x + y = 24$
$x - y = 2$

The solution set is {(13, 11)} which satisfies both the equations at the same time.

$13 + 11 = 24$
$13 - 11 = 2$

Methods of Solving Simultaneous Equations

1. Method of Substitution

Solve:

$x + y = 4 \ldots$ (i)
$x - y = 2 \ldots$ (ii)

Steps to follow:

Solve the first equation for x:

$x + y = 4$
$x = 4 - y$

Substitute this expression for x in the other equation and solve for y:

$x - y = 2$
$(4 - y) - y = 2$
$4 - 2y = 2$
$-2y = 2 - 4$
$-2y = -2$
$y = 1$

Substitute this value for ‘y’ in the equation of step 1

$x = 4 - y$
$x = 4 - 1$
$x = 3$

Check in both equations:

$x + y = 4 \ldots$ (i)
$3 + 1 = 4$

$x - y = 2 \ldots$ (ii)

$3 - 1 = 2$

Therefore the solution set is $\{(3, 1)\}$

Method of Equal Coefficients

This is also called the addition or subtraction method.

When solving a system of two equations, we can sometimes add or subtract the equations to form a new equation with just one variable.

Example

Solve $3x - y = 8$

$2x + y = 7$

Addition Method

Steps to follow:

Add similar terms of the two equations

$3x - y = 8$

$2x + y = 7$

$5x = 15$ (The y terms are eliminated)

Solve the resulting equation

$5x = 15$

$x = 3$

Substitute 'x' = 3 in either of the given equations to find 'y'

$2x + y = 7$

$2(3) + y = 7$

$6 + y = 7$

$y = 7 - 6$

$y = 1$

Check in both the given equations.

$2x + y = 7$

$2(3) + 1 = 7$

$7 = 7$

$3x - y = 8$

$3(3) - 1 = 8$

$8 = 8$

Therefore the solution set is $\{(3, 1)\}$.

Subtraction Method

Example:

Solve $4a + 5b = 6$

$4a - 2b = -8$

Steps to follow:

Subtract similar terms of the two equations.

$4a + 5b = \quad 6$

$\pm 4a \pm 2b = \pm 8$

$7b = 14$ (The a-terms are eliminated)

Solve the resulting equation $b = 2$.

Substitute $b = 2$ in either of the given equations to find a.

$4a + 5b = 6$

$4a + 5(2) = 6$

$4a + 10 = 6$

$4a = 6 - 10$

$4a = -4$

$a = -1$

Check in both the given equations:

$4a + 5b = 6$

$4(-1) + 5(2) = 6$

$-4 + 10 = 6$

$6 = 6$

$4a - 2b = -8$

$4(-1) - 2(2) = -8$

$-4 - 4 = -8$

$-8 = -8$

Therefore the solution set is $\{(1, 2)\}$.

In equations where fractions are involved we solve the fractions first by the LCM method and then proceed to solve the equations by addition or subtraction.

Example:

Solve $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \ldots$ (i)

$x + \frac{y}{6} = 5 \ldots$ (ii)

The LCM for the denominators in both equations is 6.

Multiplying each equation by 6.

$$6\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 4 \times 6$$

$$3x + 2y = 24 \ldots \text{(iii)}$$

$$6\left(x + \frac{y}{6}\right) = 5 \times 6$$

$$6x + y = 30 \ldots \text{(iv)}$$

Equation (iii) and (iv) can be solved in the usual manner.

Comparison Method

Steps to follow:

1. For each equation find the first variable in terms of the second.
2. Comparing the two equations thus obtained, we get an equation with the second variable.
3. Solve this equation to find the value of the second variable.
4. Substitute the value of the variable obtained in either of the given equations.
5. Solve the resulting equation to find the value of the first variable.

- Solve $2x + 3y = 12 \ldots \text{(i)}$

  $3x - 2y = 5 \ldots \text{(ii)}$

Finding the value of x from (i)

$2x + 3y = 12$

$2x = 12 - 3y$

$x = \dfrac{12 - 3y}{2} \ldots \text{(iii)}$

Similarly finding the value of x in (ii)

$3x - 2y = 5$

$3x = 5 + 2y$

$x = \dfrac{5 + 2y}{3} \ldots \text{(iv)}$

Comparing (iii) and (iv)

$$\frac{12 - 3y}{2} = \frac{5 + 2y}{3}$$

LCM is 6.

$$6\left(\frac{12 - 3y}{2}\right) = 6\left(\frac{5 + 2y}{3}\right)$$

$3(12 - 3y) = 2(5 + 2y)$

$36 - 9y = 10 + 4y$

$-9y - 4y = 10 - 36$

$-13y = -26$

$y = 2$

Substituting the value of $y = 2$ in … (i)

$2x + 3y = 12$

$2x + 3(2) = 12$

$2x = 12 - 6$

$x = \frac{6}{2}$

$x = 3$

To check, substitute the values of x and y in the given equations.

$2x + 3y = 12$

$2(3) + 3(2) = 12$

$6 + 6 = 12$

$12 = 12$

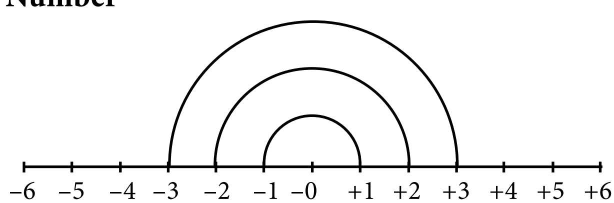
Therefore the solution set is $\{(3, 2)\}$.

Word Problems Involving Simultaneous Linear Equations

The same method applies to solving problems with equations in two variables as for one variable.

1. Read the problem carefully. Decide what numbers are asked for and what information is given.
2. Choose the variables and use them with the given facts to represent the numbers described in the problem.
3. Write open sentences that represent the relationships among the numbers in the problem.
4. Solve the open sentences by the methods learnt and find the required numbers.
5. Check your results with the words of the problem. Give the answer.

Absolute Value of a Number



The diagram shows pairings of points on a number line. The paired points are at the same distance from the origin but on opposite sides of the origin. The origin is paired with itself.

Each number in a pair such as 5 and −5 is called the 'opposite' of the other number (5 + (−5) = 0).

The symbol for the opposite of a number 'a' is '− a'.

If the value of 'a' is −3, then −a = − (−3) is the positive number 3.

In general:

If 'a' is a positive number, then −a is a negative number.

If 'a' is a negative number then −a is a positive number. If 'a' is 0 then −a is 0.

The opposite of −a is 'a' that is − (−a) = a.

In any pair of non-zero opposites such as −5 and 5, one number is negative and the other is positive. The positive number of any pair of opposite non-zero real numbers is called the **absolute value** of each number in the pair.

The absolute value of a number **a** is denoted by $|a|$

$|-5| = 5$ and $|5| = 5$

The absolute value of a number may also be thought of as the distance of the number from the origin on the number line. The distance of −5 and 5 are 5 units from the origin.

The absolute value of 0 is defined to be 0 itself.

$|0| = 0$

Examples:

Find the solution set of:

$|x| = 3$

$|x| = 3$, $x = 3$ or $x = -3$

Equations Involving Absolute Values

Find the solution set of $|y - 3| = 4$

The condition for the equation is satisfied if 'y' is replaced by a number such that y − 3 becomes 4 or −4.

So either $y - 3 = 4$ … (i)

or $y - 3 = -4$ … (ii)

(i) $y - 3 = 4$

$y - 3 + 3 = 4 + 3$

$y = 7$

(ii) $y - 3 = -4$

$y - 3 + 3 = -4 + 3$

$y = -1$

Hence the solution set is {7, –1}.

Find the solution set of:

$|x + 4| - 2 = 6$

$|x + 4| - 2 = 6$

$|x + 4| - 2 + 2 = 6 + 2$

$|x + 4| = 8$

(i) $x + 4 = 8$

$x + 4 - 4 = 8 - 4$

$x = 4$ or

(ii) $x + 4 = -8$

$x + 4 - 4 = -8 - 4$

$x = -12$

Hence the solution set is {4, –12}

Find the solution set: $|7x| = -14$

There is no real number whose absolute value is negative.

Therefore the solution set is an empty set which is written as { } or φ.

Introduction to Trigonometry

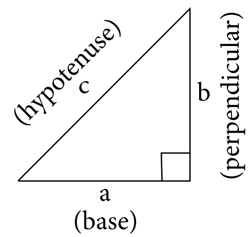
(pages 123-133)

UNIT **12**

In this unit we will see how the Pythagorean Theorem can be used to find the lengths of the sides of triangles.

Pythagorean Theorem

In any right-angled triangle, the square of the length of the hypotenuse equals the sum of the squares of the lengths of the other two sides.



For the triangle shown

$c^2 = a^2 + b^2$

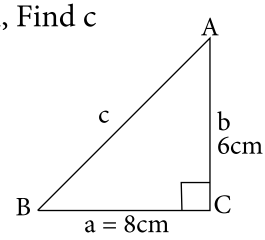
$a^2 = c^2 - b^2$

$b^2 = c^2 - a^2$

We can apply the Pythagorean Theorem to find the length of one side of a right-angled triangle when the other two sides are given.

Examples:

- In a right-angled triangle ABC $m\angle C = 90°$, $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, Find c



$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (8)^2 + (6)^2$

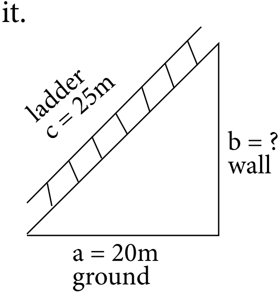
$c^2 = 100$

$c = \sqrt{100}$

$c = 10$cm

- The foot of a ladder 25m long, is at a distance of 20m from the wall. Find the height of the point on the wall where the top end of the ladder touches it.

Draw a diagram to represent the ladder and the wall:



$c^2 = a^2 + b^2$

$(25)^2 = (20)^2 + b^2$

$b^2 = (25)^2 - (20)^2$

$b^2 = 625 - 400$

$= 225$

$b = \sqrt{225}$

$= 15$m

Therefore the height of the point on the wall where the ladder touches it is 15m.

Hero's Formula

Hero's formula is used to calculate the area of a triangle when the measures of its three sides are given.

In a triangle with sides a, b, c the perimeter 2s is equal to the sum of the three sides i.e. $a + b + c = 2s$.

The formula for finding the area is $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

Where s = half of the perimeter.

To find **s**, add all the measures of the three sides and divide them by 2.

$s = \frac{a + b + c}{2}$

Example:

Find the area of a triangle whose sides measure 10cm, 8cm, and 6cm respectively (by Hero's formula).

$a = 10, b = 8, c = 6$

$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{10 + 8 + 6}{2} = \frac{24}{2} = 12\text{cm}$

Applying Hero's Formula

Area of the $\Delta = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

Area of the $\Delta = \sqrt{12(12 - 10)(12 - 8)(12 - 6)}$

Area of the $\Delta = \sqrt{12(2)(4)(6)}$

Area of the $\Delta = \sqrt{12 \times 2 \times 4 \times 6}$

Area of the $\Delta = \sqrt{576}$

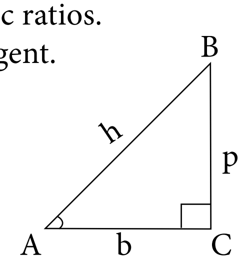
Area of the $\Delta = 24\text{ cm}^2$

Hero's Formula can be used for finding the area of a quadrilateral by dividing it into two triangles by drawing a diagonal joining the opposite vertices. First find the area of the triangles separately and then add them.

Trigonometric ratios of acute angles

The ratio of the sides of a rightangled triangle are called trigonometric ratios.

There are 3 basic trigonometric ratios named as Sine, cosine and Tangent.



Trigonometric Ratios:

Basic trigonometric ratios are

Sin A = $\frac{p}{h}$

Cos A = $\frac{b}{h}$

Tan A = $\frac{p}{b}$

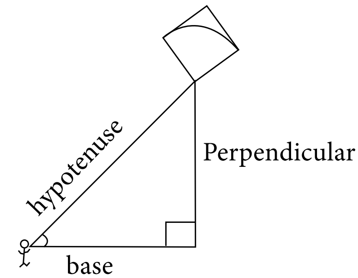
p = perpendicular
b = base
h = hypotenuse

Derived trigonometric ratios from basic forms are:

Cosec A = 1/Sin A = $\frac{h}{p}$

Sec A= 1/cos A = $\frac{h}{b}$

Cot A = 1/tan A = $\frac{b}{p}$



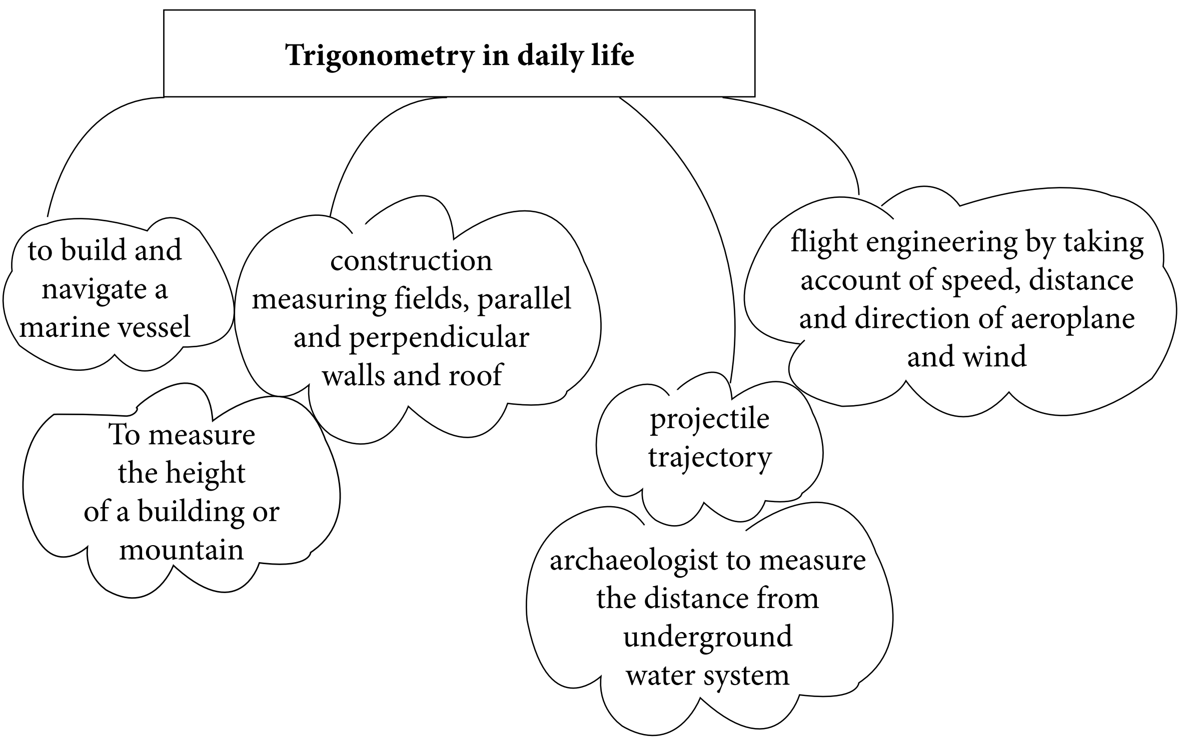
Real life application of trigonometric ratios.

A child flying a kite:

Distance from the child to the kite is hypotenuse.

Distance from the kite to ground is perpendicular.

Distance from child to the point below the kite on the ground is base.



link https://www.embibe.com

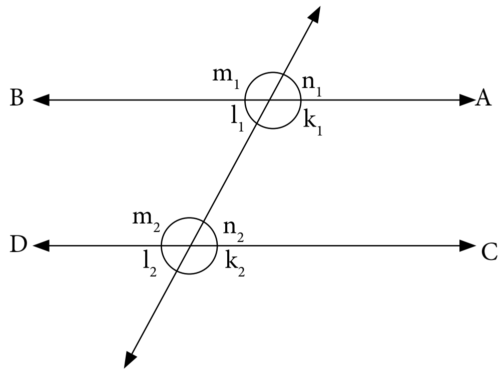
UNIT

13

Fundamentals of Geometry

(pages 134-155)

Angles made by the transversal intersecting two paralleled lines



Angles formed by the transversal.

- Vertically opposite angles are equal

  $m_1 = k_1$; $n_1 = l_1$

  $m_2 = k_2$; $n_2 = l_2$

- Corresponding angles are equal

  $n_1 = n_2$, $k_1 = k_2$

  $m_1 = m_2$; $l_1 = l_2$

- Alternate interior angles are equal

  $k_1 = m_2$

  $n_1 = l_2$

- Alternate exterior angles are equal

  $m_1 = k_2$

  $n_1 = l_2$

Activity:

Give the students three bamboo sticks. Ask them to place two of them parallel to each other on the floor. Third bamboo stick will be transversal to the parallel sticks. Student will name the types of angles made by the bamboo sticks and measure them with a big protractor made for use on the board.

Polygons

A **polygon** is a closed plane figure formed by line segments. The line segments are called **sides**. The point where the segments meet is called a **vertex**.

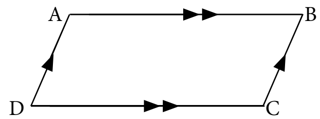
In a **regular polygon**, all sides are congruent and all angles are congruent.
Draw the following chart and ask the pupils to complete it.

	Triangle	Quadri-lateral	Pentagon	Hexagon	Heptagon	Octagon	Nonagon	Decagon
No. of sides	3							
No. of vertices	3							
No. of diagonals	0							

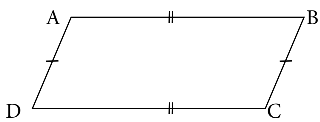
Follow the steps of construction given in the textbook to draw polygons and quadrilaterals with the given measurements.
Construction of regular pentagon, hexagon and octagon are given on page 140–141 of the book

Properties of a parallelogram

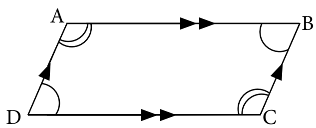
1. Opposite sides of a parallelogram are parallel.



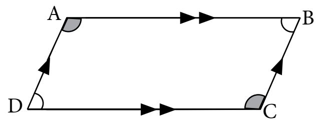
2. Opposite sides of a parallelogram are equal.



3. Opposite angles of a parallelogram are equal.

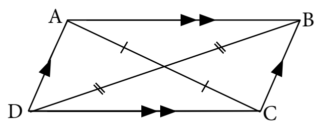


4. Interior angles on parallel lines are supplementary.



$< A + < B = 180°$
$< B + < C = 180°$

5. Diagonals of a parallelogram bisect each other.



Practical Geometry *(pages 156-160)*

The proofs of all the above properties are given on page 148 of the textbook.

This unit is based on the construction of quadrilateral considering different cases.

All the steps of construction are given in the book.

Activity:

Write all the cases of construction of rectangle and square on flash cards, one flashcard for each case. Divide the class in groups of 4 students. Assign each group on or two cases. Ask them to construct the shape and write the steps of construction on a sheet of paper.

Each group will present the work in front of whole class. Mark them for neatness, accuracy, handling of instrument, and timing.

UNIT

15

Surface Area and volume *(pages 161-166)*

Surface Area and Volume of a Sphere

A sphere is a solid bounded by a single curved surface, and is such that all line segments drawn from a fixed point within the solid to the bounding surface are equal in length. The fixed point is called the 'centre' of the sphere and a line drawn from the centre to the bounding surface is called a radius.

Volume of a sphere of radius **r** = $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Surface area of a sphere = $4\pi r^2$.

To calculate the volume and surface area of a sphere:

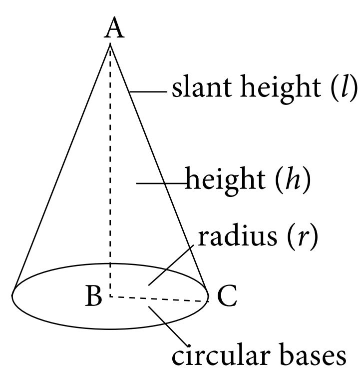
A solid sphere has a radius of 7 cm. Calculate its volume and its surface area. (for calculation purposes π is given value $\frac{22}{7}$)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$$
$$= 1437.33 \text{ cm}^3$$

Surface area $= 4\pi r^2$
$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= 616 \text{ cm}^2$$

Surface Area and Volume of a Cone

A right circular cone is generated by the revolution of a right-angled triangle about one of the sides containing the right angle. Its base is a circle and the length of the segment joining the vertex and the centre of the base is known as the height of the cone. The length of the line segment joining the vertex to any point on the circumference of the base is called the **slant height**.



OXFORD UNIVERSITY PRESS

In the figure: AB is the height (h)

BC is the radius (r)

AC is the slant height (l)

Slant height of a cone:

In the figure of the cone ΔABC is a right-angled triangle, the base BC is the radius (r).

The slant height AC is the hypotenuse (I).

The height AB is the perpendicular (h).

The right angle is at B.

The vertex is at A.

By the Pythagorean Theorem:

$(\text{hypotenuse})^2 = (\text{base})^2 + (\text{altitude})^2$

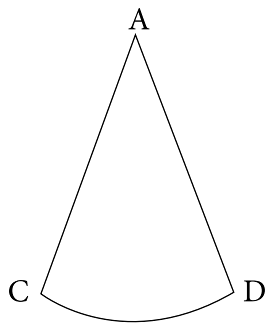
$(\text{hypotenuse}) = \sqrt{(\text{base})^2 + (\text{altitude})^2}$

Therefore the slant height $= \sqrt{(\text{base})^2 + (\text{altitude})^2}$

$l = \sqrt{r^2 + h^2}$

Curved surface area of a cone

Take a paper cone and cut along the slant edge and flatten it out. We get a sector of a circle, ACD.



The plane figure thus obtained represents the curved surface of a cone. The length of arc CD is equal to the circumference of the base circle of the cone i.e. the length of arc CD is equal to $2\pi r$. We can prove that $\dfrac{\text{area of sector}}{\text{area of circle}} = \dfrac{\text{length of sector}}{\text{circumference of circle}}$

area of circle with radius l $= \pi l^2$

thus $\dfrac{\text{area of sector}}{\text{area of circle}} = \dfrac{2\pi r}{2\pi l}$

$\dfrac{\text{area of sectorr}}{\pi l^2} = \dfrac{2\pi r}{2\pi l}$

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

area of sector $= \frac{2\pi r}{2\pi l} \times \pi l^2$
$= \pi r l.$

Therefore the curved surface area of a cone = $\pi r l$.

The total surface area = Area of the base + Area of curved surface.

$= \pi r^2 + \pi r l.$

$= \pi r\,(r + l).$

Volume of a cone

Volume is the space occupied by a body. To find the volume of a cone we take a hollow cone and a hollow cylinder having the same altitude and base. Fill the cone with water and pour it into the cylinder. Repeat the procedure till the cylinder is full.

How many cones were needed to fill the cylinder? The answer is 3.

This means that the volume of a cone is 3 times the volume of a cylinder.

We know that the volume of a cylinder = $\pi r^2 h$ is equal to 3 times the volume of a cone.
3 times the volume of a cone $= \pi r^2 h$

volume of a cone $= \frac{\pi r^2 h}{3}$
$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Demonstrative Geometry

(pages 167-173)

UNIT

16

Demonstrative geometry is a branch of mathematics in which theorems on geometry are proved through logical reasoning.

Demonstrative geometry	A branch of geometry which deals with theorem through logical reasoning.
Reasoning	Inductive reasoning leads to a general conclusion. Deductive reasoning leads to a specific conclusion.
Postulates/axioms	Assumed to be true without any proof or demonstration.
Hypothesis	The statements based on evidences. They are beginning point for further investigation.
Corollary	Proposition that follows from one already proved.
Proposition	Propositions are developed on the bases of postulates and axioms.
Theorem	These are general statements proved by a chain of reasoning.

Theorem (1–9) are given on page (168–171) with proofs. Explain them on the board logically with reasoning.

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

UNIT

17 Information Handling

(pages 174-187)

Measure of central tendencies

Averages

When data is summarized in the form of a frequency distribution table, it can be represented by single value called the **average** or the **measure of central tendency**.

Types of Averages

Arithmetic Mean (AM) for Ungrouped Data

It is calculated like a simple average by the formula:

$$\text{AM} \quad \text{or } \overline{X} = \frac{\text{sum of observations}}{\text{No. of observations}}$$

$$\text{or } \overline{X} = \frac{\Sigma x}{n}$$

(Σ is called sigma. It represents 'the sum of'.)

Mean for grouped data

When the data is very large it is convenient to make a frequency table and then apply the formula:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

When 'Σf' is the total frequency

'Σfx' is the sum of the fx column (i.e. midpoint x frequency in interval)

Examples for finding mean of grouped and ungroup date are given on page 180, 181, and 182 of the book.

Median

Median is also an average. It is the value which lies exactly in the centre of the data.

Methods for finding the median

For ungrouped data:

Arrange the values in ascending or descending order.

If the number of values 'n' is odd, apply the formula:

$$\text{Median} = \frac{n+1}{2}\text{th value}$$

If the number of values ‘n’ is even, apply the formula:

$$\text{Median} = \frac{n/2 + (n + 2)/2}{2} \text{ th value}$$

Examples are given on page 183 of the book.

Median for grouped data

Formula to be used is:

$$\text{Median} = 1 + \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

Where ‘I’ is the lower class boundary of the median class.
- h is the size of class intervals.
- f is the frequency of the median class.
- n is the total frequency i.e. $\sum f$
- c is the cumulative frequency of the intervals before the median class.

We are familiar with the terms except for c which is the cumulative frequency.

Cumulative frequency column is calculated by successive addition of the frequencies from the frequency column

From the data find the median:

Wages (Rs)	No. of labourers
50 – 59	8
60 – 69	10
70 – 79	16
80 – 89	14
90 – 99	10
100 – 109	5
110 – 119	2
	n = 65

n = 65

$\frac{n}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

Make four columns.

Class Interval	Class Boundary	Frequency	Cumulative Frequency
50 – 59	49.5 – 59.5	8	8
60 – 69	59.5 – 69.5	10	18 C

70 – 79	69.5 – 79.5	16	34	Median class
80 – 89	79.5 – 89.5	14	58	
90 – 99	89.5 – 99.5	10	58	
100 – 101	99.5 – 109.5	5	63	
110 – 119	109.5 – 119.5	2	65	

The median group or class is where the $\frac{n}{2}$ value lies

Median = $1 + \frac{h}{f}\ (\frac{n}{2} - c)$

l = 69.5

f = 16

h = 10

n = 65

c = 18

Applying the formula:

$$\text{Median} = 69.5 + \frac{10}{16}(32.5 - 18)$$
$$= 78.56$$

Mode

Mode is the value which occurs most frequently in a data.

Mode of ungrouped data:

The value which has the highest frequency in the data is called mode of the data.

There can be several modes in a data. The examples for ungrouped data are given on page 184 of the book.

Mode of grouped data:

The modal class has the highest frequency value.

Formula:

$$\text{Mode} = I + \frac{(f_m - f_1) \times h}{(f_m - f_1 + (f_m - f_2)}$$

I = lower class boundary of the modal class

f_m = frequency of the modal class

f_1 = frequency preceding the modal class

f_2 = frequency following the modal class

h = size of the class interval

All the concepts have been discussed and explained through examples in the book. Students should learn the formula to solve the problems.

گروہی مواد کا انداز

کلیہ

انداز = $l + /(f_m - f_1) \times h/(f_m - f_1) + (f_m - f_2)$

‘l’	=	عادہ جماعت کے زیریں درجے کا احاطہ ہے۔
f_m	=	عادہ جماعت کا تعدد ہے۔
f_1	=	عادہ جماعت سے پہلے کا تعدد ہے۔
f_2	=	عادہ جماعت کے بعد کا تعدد ہے۔
h	=	درجے کے وقفے کا حجم۔

l = 69.5
f = 16
h = 10
n = 65
c = 18

کلیہ استعمال کرتے ہوئے :

وسطانیہ = 69.5 + 10/16 (32.5 - 18)

= 78.56

انداز

انداز ایک قدر ہے جو مواد میں اکثر استعمال ہوتی ہے۔

غیر گروہی مواد کا انداز :

درج ذیل مواد کا انداز معلوم کیجیے۔

3	2	5	3	4	1	2	3	1
3	4	2	4	3	2	0	2	3

تعدد کا جدول

اشیا	تعدد
0	1
1	2
2	5
3	6 (اعلیٰ ترین تعدد)
4	3
5	1

3 کا تعدد سب سے زیادہ ہے اس لیے یہ ہی انداز ہے۔

مواد میں ایک سے زائد انداز بھی ہو سکتے ہیں۔

غیر گروہی مواد کی مثالیں کتاب کے صفحہ نمبر 184 پر دی گئی ہیں۔

جبکہ	‘l’	وسطانیہ کے نچلے درجے کا احاطہ ہے۔
	‘h’	جماعتی وقفوں کا حجم ہے۔
	‘f’	وسطانیہ کے درجے کا تعدد ہے۔
	‘n’	مکمل تعدد یعنی f ہے۔
	‘c’	وسطانیہ جماعت سے پہلے وقفوں کا اجتماعی تعدد ہے۔

ہم تمام اصطلاحات سے واقف ہیں سوائے ’c‘ کے جس کا مطلب ’اجتماعی تعدد‘ ہے۔ تعدد کو لگاتار جمع کرنے سے اجتماعی تعدد حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال : مواد سے وسطانیہ معلوم کیجیے :

مزدوروں کی تعداد	اجرتیں (روپے)
8	50-50
10	60-69
16	70-79
14	80-89
10	90-99
5	100-109
2	110-119
n = 65	

$$n = 65$$

$$n/2 = 65/2 = 32.5 = 32.5$$

چار کالم بنائیے۔

		اجتماعی تعدد	تعدد	جماعتی احاطہ	جماعتی وقفہ
		8	8	49.5 - 59.5	50 - 59
	C	18	10	59.5 - 69.5	60 - 69
وسطانیہ جماعت		34	16	69.5 - 79.5	70 - 79
		48	14	79.5 - 89.5	80 - 89
		58	10	89.5 - 99.5	90 - 99
		63	5	99.5 - 109.5	100 - 109
		65	2	109.5 - 119.5	110 - 119

وسطانیہ گروہ یا درجہ وہ ہے جہاں n/2 قدر موجود ہے۔

$$\text{وسطانیہ} = l + h/f(n/2 - c)$$

(Information Handling) اعداد و شمار کا اندراج

حسابی اوسط (AM) برائے غیر گروہی مواد

اس کو عام اوسط کی طرح اس کلیے سے معلوم کیا جا سکتا ہے :

AM یا $\overline{X}$ = مشاہدات کی تعداد/مشاہدات کا حاصل

یا $\overline{X} = \Sigma x / n$

(Σ کو سگما کہا جاتا ہے اس کا مطلب ہے 'حاصل جمع')۔

گروہی مواد کا اوسط

اگر مواد بہت طویل ہو تو آسانی کے لیے ایک تعددی جدول بنایئے اور پھر کلیے پر عمل کریں۔

$$\overline{X} = \Sigma fx/\Sigma f$$

جبکہ Σfx مکمل تعدد ہے۔

Σfx کالم کا حاصل جمع ہے۔ (یعنی وقفے میں تعدد x درمیانی نقطہ)

مثال : جدول ایک جماعت کے 35 طلبا کے حاصل کردہ نمبر حاصل کرتا ہے۔

وسطانیہ

وسطانیہ بھی ایک اوسط ہے۔ یہ وہ قدر ہے جو مواد کے بالکل مرکز میں پائی جاتی ہے۔

وسطانیہ معلوم کرنے کے طریقے

غیر گروہی مواد کے لیے :

قدروں کو صعودی یا نزولی صورت میں ترتیب دیجیے۔

اگر قدروں کی تعداد 'n' طاق ہے تو یہ کلیہ استعمال کریں :

قدر $n + 1/2$ = وسطانیہ

گروہی مواد کے لیے وسطانیہ

استعمال کیے جانے والا کلیہ ہے :

وسطانیہ = $l + h/f(n/2 - c)$

سیکٹر کا رقبہ = $(2\pi r/2\pi l) \times \pi l^2$

$= \pi rl$

اس لیے ایک مخروط کی خمدار سطح کا رقبہ $= \pi rl$

مکمل سطح کا رقبہ = اساس کا رقبہ + خمدار سطح کا رقبہ

$= \pi r^2 + \pi rl$

$= \pi r(r + l)$

مخروط کا حجم

حجم وہ جگہ ہے جو کوئی جسم گھیرتا ہے۔ کسی مخروط کا حجم معلوم کرنے کے لیے ہم ایک خالی مخروط اور خالی سلینڈر کا استعمال کرتے ہیں جن کی اونچائی اور اساس مساوی ہو۔ مخروط میں پانی بھریں اور اسے سلینڈر میں ڈال دیں۔ یہ عمل اس وقت تک جاری رکھیں جب تک سلینڈر بھر نہ جائے۔

سلینڈر کو بھرنے کے لیے کتنے مخروط کی ضرورت ہوگی؟ جواب ہے تین۔

اس کا مطلب ہوا کہ مخروط کا حجم سلینڈر کے حجم سے تین گنا کم ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ ایک سلینڈر کا حجم $= \pi r^2h$ جو کہ مخروط کے حجم کے تین گنا کے برابر ہے۔

مخروط کے حجم کا تین گنا $= \pi r^2h$

ایک مخروط کا حجم $= \pi r^2h/3$

$= 1/3\pi r^2h$

OXFORD UNIVERSITY PRESS

مخروط کی ترچھی اونچائی :

مخروط میں ABC △ ایک زاویہ قائمہ مثلث ہے۔ اساس BC قطر (r) ہے۔

ترچھی اونچائی AC وتر (l) ہے۔

اونچائی AB عمود (h) ہے

زاویہ قائمہ B پر ہے۔

راس A پر ہے۔

مسئلہ فیثا غورث کے مطابق :

(وتر)^2 = (اساس)^2 + (اونچائی)^2

(وتر) = √(اساس)^2 + (اونچائی)^2

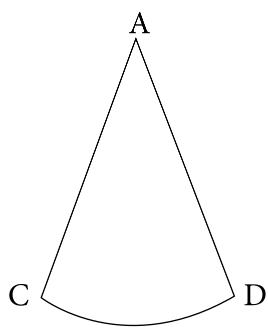
لہٰذا ترچھی اونچائی = √(اساس)^2 + (اونچائی)^2

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

مخروط کا خم دار سطحی رقبہ

کاغذ کا ایک مخروط لیجیے اور اسے سرے سے ترچھا کاٹیں اور کھول لیں۔

ہمیں دائرے کا ایک حصہ ACD حاصل ہوتا ہے۔



سپاٹ شکل جو حاصل ہوئی مخروط کی خم دار سطح کو ظاہر کرتی ہے۔

قوس CD کی لمبائی مخروط کی اساس کے دائرے کے گھیر کے مساوی ہے یعنی محراب CD کی لمبائی $2\pi r$ کے مساوی ہے۔

ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

دائرہ کے گھیر / سیکٹر کی لمبائی = دائرہ کا رقبہ / سیکٹر کا رقبہ

دائرہ کا رقبہ قطر l کے ساتھ = πl^2

اس طرح دائرہ کا رقبہ / سیکٹر کا رقبہ = $2\pi r/2\pi rl$

πl^2 / سیکٹر کا رقبہ = $2\pi r/2\pi l$

(Surface Area and Volume) سطحی رقبہ اور حجم

کرّہ ایک ٹھوس شکل ہے جو ایک خم دار سطح سے مکمل طور پر بند ہوتی ہے اور اس طرح کہ اگر کسی مخصوص نکتے سے خطوط کھینچے جائیں تو وہ لمبائی میں برابر ہوں گے۔ مخصوص نکتہ کرّے کا 'مرکز' کہلاتا ہے اور اس سے کھینچا گیا خط جو بند سطح تک جاتا ہو 'قطر' کہلاتا ہے۔

کرّے کے حجم کا طر 'r' = $4/3\pi r^3$

کرّے کا سطحی رقبہ = $4\pi r^2$

کرّے کا رقبہ اور حجم ناپنا:

مثال: ایک ٹھوس کرّے کا قطر 7 cm ہے۔ اس کے حجم اور سطحی رقبے کی پیمائش کیجیے۔
(پیمائش کے مقصد کے لیے π کی دی گئی قدر 22/7 ہے)

حجم $= 4/3\pi r^3$

$= 4/3 \times 22/7 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 1437.33\ cm^3$

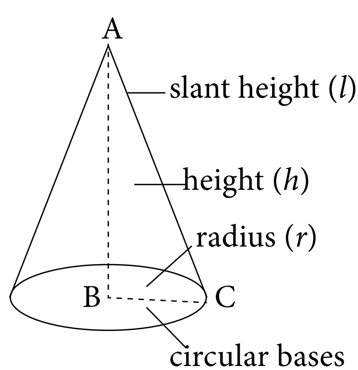
سطحی رقبہ $= 4\ \pi r^2$

$= 4 \times 22/7 \times 7 \times 7$

$= 616\ cm^2$

مخروط کا سطحی رقبہ اور حجم

گول مخروط ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے دائرے سے وجود میں آتی ہے جس کے اضلاع میں کم از کم ایک زاویہ قائمہ ہو۔ اس کی اساس گول ہے۔ راس اور اساس کے مرکز کو ملانے والا خط، مخروط کی لمبائی کہلاتا ہے۔ وہ خط جو راس کو گھیر کے کسی بھی نقطے سے ملاتا ہے 'ترچھی اونچائی' کہلاتا ہے۔



شکل میں AB اونچائی (h) ہے۔
شکل میں BC قطر (r) ہے۔
شکل میں AC ترچھی اونچائی (l) ہے۔

بنیادی جیومیٹری (Fundamentals of Geometry)

کثیر الاضلاع

’کثیر الاضلاع‘ ایک بند سپاٹ شکل ہے جو خطوط سے بنائی جاتی ہے۔ یہ خطوط ’اضلاع‘ کہلاتے ہیں۔ وہ نکتہ جہاں یہ آپس میں ملتے ہیں ’راس‘ کہلاتا ہے۔

ایک ’عام کثیر الاضلاع‘ میں تمام اضلاع اور زاویے ایک جیسے ہوتے ہیں۔

دیا گیا جدول بنایئے اور طلبا سے کہیں کہ اسے مکمل کریں۔

کثیر الاضلاع

	مثلث	چوکور	مخمس	مسدس	مسبع	مثمن	ذوتسعہ	ذوعشرہ
اضلاع کی تعداد	3							
راسوں کی تعداد	3							
ترچھے خطوط کی تعداد	0							

کثیر الاضلاع اور چوکور کو دی گئی پیمائش کے مطابق بنانے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی ہدایات پر عمل کریں۔

OXFORD UNIVERSITY PRESS

ہیرو کا کلیہ

ہیرو کا کلیہ مثلث کے رقبے کی پیمائش کے لیے استعمال ہوتا ہے جب کہ مثلث کے تینوں ضلعوں کی پیمائش دی گئی ہو۔

ایک مثلث جس میں سمتوں a, b, c کے ساتھ محیط 2s تین ضلعوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے یعنی

$a + b + c\ (= 2s)$

رقبہ معلوکرنے کا کلیہ ہے $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

جبکہ s = محیط کا نصف ہے۔

's' معلوم کرنے کے لیے تینوں اضلاع کی لمبائیاں جمع کر کے 2 سے تقسیم کر دیں۔

$$s = a + b + c/2$$

مثال : ایک مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے تمام اضلاع بالترتیب 8cm, 10cm اور 6cm ہیں۔

(ہیرو کے کلیہ کے ذریعہ)

$$a = 10, b = 8, c = 6$$

$$s = a + b + c/2 = 10 + 8 + 6/2 + 24/2 + 12$$

ہیرو کا کلیہ استعمال کرنا

$\triangle$ کا رقبہ $= \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

$\triangle$ کا رقبہ $= \sqrt{12(12-10)\,(12-8)\,(12-6)}$

$\triangle$ کا رقبہ $= \sqrt{12(2)(4)(6)}$

$\triangle$ کا رقبہ $= \sqrt{12 \times 2 \times 4 \times 6}$

$\triangle$ کا رقبہ $= \sqrt{576}$

$\triangle$ کا رقبہ $= 24\ cm^2$

ہیرو کا کلیہ ایک چوکور کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس مقصد کے لیے دو متضاد راسوں پر ترچھی لائن کھینچ کر انھیں دو مثلثوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ پہلے مثلثوں کا رقبہ علیحدہ علیحدہ معلوم کریں بعد میں انھیں جمع کر دیں۔

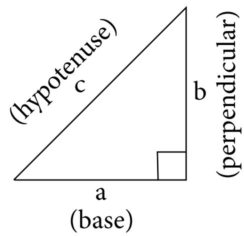
(Introduction to Trigonometry) علم المثلثات

اس یونٹ میں ہم دیکھیں گے کہ ایک مثلث کی سمتوں کی لمبائی جاننے کے لیے مسئلہ فیثا غورث کو کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ فیثا غورث

کسی بھی قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع باقی دونوں ضلعوں (قاعدہ اور عمود) کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

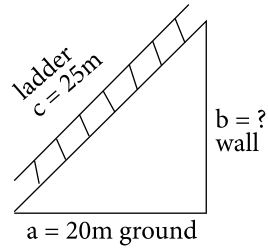
$c^2 = a^2 + b^2$
$a^2 + c^2 - b^2$
$b^2 = c^2 - a^2$



کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں کسی ایک ضلع کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے ہم مسئلہ فیثا غورث کا استعمال کر سکتے ہیں جبکہ دوسرے دو ضلعوں کی لمبائی معلوم ہو۔

مثال: ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC m $\angle C = 90^0$, $a = 8$ cm, $b = 6$ cm میں C معلوم کیجیے۔

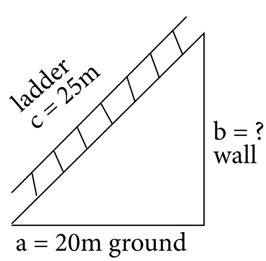
$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = (8)^2 + (6)^2$
$c^2 = 100$
$c = \sqrt{100}$



مثال: ایک سیڑھی کا پائیدان 25m لمبا اور دیوار سے 20m کے فاصلے پر ہے۔ اس جگہ کی لمبائی معلوم کیجیے جہاں سیڑھی کا بالائی سرا دیوار کو چھوتا ہو۔

ایک تصویر بنائیے جو سیڑھی اور دیوار کو ظاہر کرتی ہے۔

$c^2 = a^2 + b^2$
$(25)^2 = (20)^2 + b^2$
$b^2 = (25)^2 - (20)^2$
$b^2 = 625 - 400$
$= 225$
$b = \sqrt{225}$
$= 15$m



اس لیے دیوار پر اس مقام کی جہاں سیڑھی اسے چھوتی ہے، اونچائی 15m ہے۔

حتمی قدریں رکھنے والی مساوات

مثال: $|y - 3| = 4$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

مساوات کے لیے شرط کی تشفی ہو جاتی ہے اگر y کو ایک عدد مثلاً $y - 3$ سے تبدیل کر دیا جائے جو 4 یا 4 ہو جاتا ہے۔

لہٰذا یا تو $y - 3 = 5$ ...(i)

یا $y - 3 = 4$

(i)
$$y - 3 = 4$$
$$y - 3 + 3 = 4 + 3$$
$$y - 3 + 3 = 4 + 3$$
$$y = 7$$

(ii)
$$y - 3 = -4$$
$$y - 3 + 3 = -4 + 3$$
$$y = -1$$

اس طرح حل سیٹ ہے۔ $\{7, -1\}$

مثال: حل سیٹ معلوم کیجیے:

$$|x + 4| - 2 = 6$$
$$|x + 4| - 2 = 6$$
$$|x + 4| - 2 + 2 = 6 + 2$$
$$|x + 4| = 8$$

(i)
$$x + 4 = 8$$
$$x + 4 - 4 = 8 - 4$$
$$x = 4$$

یا

(ii)
$$x = 4 = -8$$
$$x + 4 - 4 = -8 - 4$$
$$x = -12$$

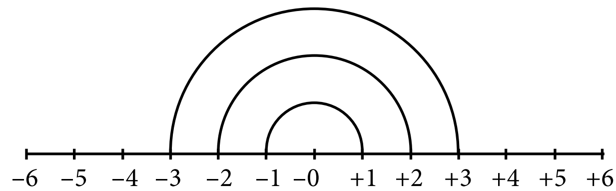
حل سیٹ ہے $\{4, -12\}$

مثال: $|7x| = -14$ کا حل سیٹ معلوم کیجیے۔

کوئی حقیقی عدد ایسا نہیں جس کی حتمی قدر، منفی ہو۔

لہٰذا حل سیٹ ایک خالی سیٹ جو اس طرح لکھا جاتا ہے { } یا O۔

عدد کی حتمی قدر



یہ تصویر ایک عددی لائن پر نقاط کے جوڑے ظاہر کر رہی ہے۔ جوڑے دار نقاط ابتدا سے یکساں فاصلے پر لیکن مخالف سمت میں ہیں۔

ہر جوڑے میں ایک عدد جیسے 5 اور 5 دوسرے عدد کا 'مخالف' کہلاتا ہے۔ (0 = (5−) + 5)

عدد 'a' کی مخالف علامت '-a' ہے۔

اگر a کی قدر 3 ہے تو (3 −) − = a− مثبت عدد 3 ہے۔

عام طور پر:

اگر a ایک مثبت عدد ہے تو a− ایک منفی عدد ہے۔

اگر a ایک منفی عدد ہے تو a− ایک مثبت عدد ہے۔ اگر a '0 ہے تو a− '0 ہے۔

a− کا مخالف a ہے جو کہ a = (a)− ہے۔

کسی غیر صفری مخالف جوڑے جیسے 5 اور 5 میں ایک عدد منفی اور دوسرا مثبت ہے۔ غیر صفری حقیقی مخالف اعداد کے کسی جوڑے کا مثبت عدد جوڑے کے ہر عدد کی 'حتمی قدر' کہلاتا ہے۔

کسی عدد کی حتمی قدر |a| کی علامت کے ذریعے واضح کی جاتی ہے۔

مثال: 5 = |5−| اور 5 = |5

کسی عدد کی حتمی قدر کو گراف پر اس عدد کا نقطۂ آغاز سے فاصلہ بھی کہا جا سکتا ہے۔ 5 اور 5 دونوں کے گراف نقطۂ آغاز سے اکائیاں ہیں۔

0 کی حتمی قدر خود 0 ہی سے ہوتی ہے۔

$\{0\} = 0$

مثال: حل سیٹ تلاش کیجیے:

$|x| = 3$

$|x| = 3, x = 3$ یا $x = -3$

-2 متغیرات کا انتخاب کیجیے اور انھیں دیے گئے حقائق کے ساتھ استعمال کریں تاکہ مسئلے میں بیان کیے گئے اعداد کو پیش کیا جا سکے۔
-3 کھلے جملے لکھیں جو مسئلے میں دیے گئے اعداد کے تعلق کو پیش کر سکیں۔
-4 سیکھے ہوئے طریقے کے مطابق کھلے جملے لکھیں اور مطلوبہ اعداد حاصل کریں۔
-5 اپنے نتیجے کی پڑتال مسئلے کی عبارت سے کریں۔ جواب دیں۔

مثال : دو اعداد کی جمع 60 ہے اور دونوں کا فرق 36 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔ فرض کیجیے ایک عدد x ہے اور دوسرا y ہے۔

اعداد کی جمع 60 ہے۔

اس طرح $x + y = 60$ ...(i)

اعداد کا فرق ہے۔ 36

$$x - y = 36 \quad ...(ii)$$

جمع کیجیے (i) اور (ii) کو (جمع کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے)

$$\begin{aligned} x + y &= 60 \\ x - y &= 36 \\ 2x &= 96 \end{aligned}$$

$$x = 96/2 = 48$$

(i) میں $x = 48$ کی قدر متبادل کرنا۔

$$\begin{aligned} x + y &= 60 \\ 48 + y &= 60 \\ y &= 60 - 48 \\ &= 12 \end{aligned}$$

اس طرح دونوں اعداد 48 اور 12 ہیں۔

x اور y قدروں کو پڑتال کے لیے متبادل کریں :

$$\begin{aligned} x + y &= 60 \\ 48 + 12 &= 60 \end{aligned}$$

عبارتی مسائل کی مساوات بورڈ پر طلبا کے تعاون سے لکھیں۔ پھر ان سے کہیں کہ وہ خطی ہمزاد مساواتوں کو اوپر دیے گئے طریقوں میں سے کسی ایک کی مدد سے حل کریں۔

اس طرح (ii) سے x کی قدر معلوم کرنا۔

$$3x - 2y = 5$$
$$3x = 5 + 2y$$
$$x = 5 + 2y/3 \text{ ...(iv)}$$

(iii) اور (iv) کا تقابل۔

$$12 - 3y/2 = 6(5 + 2y/3)$$

ذو اضعاف اقل ہے 6

$$6(12 - 3y/2) = 6(5 + 2y/3)$$
$$3(12 - 3y) = 2(5 + 2y)$$
$$36 - 9y = 10 + 4y$$
$$-9y - 4y = 10 - 36$$
$$-13y = - 26$$
$$y = 2$$

(i) میں $y = 2$ کی قدر متبادل کرنا۔

$$2x + 3y = 12$$
$$2x + 3(2) + 12$$
$$2x = 12 - 6$$
$$x = 6/2$$
$$x = 3$$

جانچ کے لیے دی گئی مساوات میں x اور y کی قدروں کو متبادل کیجیے۔

$$2x + 3y = 12$$
$$2(3) + 3(2) = 12$$
$$6 + 6 = 12$$
$$12 = 12$$

لہٰذا حل سیٹ ہوا $\{(3, 2)\}$

ہمزاد خطی مساواتوں پر مبنی عبارتی مسائل

دو متغیرات والی مساوات کو حل کرنے کے لیے بھی وہی طریقہ استعمال ہو گا جو ایک متغیر میں ہوتا ہے۔

1- مسئلے کو غور سے پڑھیں۔ فیصلہ کریں کہ کون سے اعداد پر چھے گئے اور کیا معلومات دی گئی ہے۔

ایسی مساوات جن میں کسور شامل ہوں ان میں ہم کسور کو پہلے ذواضعاف اقل کے طریقے سے حل کرتے ہیں اور پھر بعد میں مساوات کو جمع یا تفریق کے طریقے سے حل کرتے ہیں۔

مثال: حل کیجیے۔ $x/2 + y/3 = 4$ ...(i)

$x + y/8 = 5$ ...(ii)

دونوں مساواتوں میں نسب نماؤں کا ذواضعاف اقل 6 ہے۔

دونوں مساواتوں کو 6 سے ضرب دیجیے۔

$6(x/2 + y/3) = 4 \text{ x } 6$

$= 3x + 2y = 24$ ...(iii)

$6(x + y/6) = 5 \text{ x } 6$

$= 6x + y = 30$ ...(iv)

مساوات (iii) اور (iv) کو مروجہ طریقے سے حل کیا جا سکتا ہے۔

3- تقابل کا طریقہ

نکات جن پر عمل کرنا ہے:

1- ہر مساوات کے لیے دوسرے کی رقوم میں سے پہلا متغیر تلاش کیجیے۔
2- دونوں مساوات کا تقابل کرنے سے ایک اور مساوات دوسرے متغیر کے ساتھ حاصل کی۔
3- اس مساوات کو حل کر کے دوسرے متغیر کی قدر معلوم کیجیے۔
4- دونوں مساواتوں میں کسی ایک متغیر کی قدر کو استعمال کیجیے۔
5- پہلے متغیر کی قدر معلوم کرنے کے لیے حاصل ہونے والی مساوات کو حل کیجیے۔

مثال: حل کیجیے۔ $2x + 3y = 12$ ...(i)

$3x - 2y = 6$ ...(ii)

(i) سے x کی قدر معلوم کرنا۔

$2x + 3y = 12$

$2x = 12 - 3y$

$x + 12 - 3y/x$ ...(iii)

4- دونوں مساواتوں کی پڑتال کیجیے۔

$$2x + y = 7$$
$$2(3) + 1 = 7$$
$$7 = 7$$
$$3x - y = 8$$
$$8 = 8$$

لہٰذا حل سیٹ ہے۔ {(3, 1)}

تفریق کا طریقہ

مثال: حل کیجیے۔

$$4a + 5b = 6$$
$$4a - 2b = -8$$

نکات جن پر عمل کرنا ہے:

1- دونوں مساوات کی ایک جیسی رقوم کو تفریق کیجیے:

$$4a + 5b = 6$$
$$+4a + 2b = +8$$
$$7b = 14$$ (a والی رقوم حذف کر دی گئیں)

2- حاصل ہونے والی مساوات کو حل کیجیے۔ b = 2

3- a حاصل کرنے کے لیے b = 2 کو دی گئی کسی مساوات میں رکھیے۔

$$4a + 5b = 6$$
$$4a + 5(2) = 6 = 4a + 10 = 6$$
$$4a = 6 - 10$$
$$4a = -5$$
$$a = -1$$

4- دی گئی دونوں مساواتوں کی پڑتال کیجیے:

$$4a + 50 = 6$$
$$4(-1) + 5(2) = 6$$
$$-4 + 10 = 6$$
$$6 = 8$$
$$4a - 2a = -8$$
$$4(01) - 2(2) = -8$$
$$-4 -4 = -8$$
$$-8 = -8$$

لہٰذا حل سیٹ ہے۔ {(1, 2)}

$$x = 4 - 1$$
$$x = 3$$

4- دونوں مساواتوں کی پڑتال کیجیے :

$$x + y = 4 \ldots \text{(i)}$$
$$3 + 1 = 4$$
$$x - y = 2 \ldots \text{(ii)}$$
$$3 - 1 = 2$$

لہٰذا حل ہے (3, 1)

2 ۔ مساوی عددی سر کا طریقہ

اسے بھی جمع اور تفریق کا طریقہ کہا جاتا ہے۔

جب دو مساوات کے نظام کا حل تلاش کیا جاتا ہے تو ہم کبھی کبھی ان مساواتوں کو جمع یا تفریق کرتے ہیں تا کہ ایک نئی مساوات کو صرف ایک متغیر کے ساتھ تشکیل دیا جا سکے۔

مثال : حل کیجیے

$$3x - y = 8$$
$$2x + y = 7$$

جمع کا طریقہ

نکات جن پر عمل کرنا ہے۔

1- دونوں مساوات کی ایک جیسی رقوم کو جمع کیجیے :

$$3x - y = 8$$
$$2x + y = 7$$
$$5x \quad = 15$$ (رقم y حذف کردی گئی)

2- حاصل ہونے والی مساوات کو حل کیجیے۔

$$5x = 15$$
$$x = 3$$

3- y کے حصول کے لیے $x = 3$ کو دی گئی کسی بھی مساوات رکھیں۔

$$2x + y = 7$$
$$2(3) + y = 7$$
$$6 + y = 7$$
$$y = 7 - 6$$
$$y = 1$$

ہمزاد مساواتیں (Simultaneous linear equations)

ہمزاد مساواتیں

مساوات انھی تغیرات کی مدد سے 'مساوات کا ایک نظام' تشکیل دیتی ہیں اور انھیں 'ہمزاد مساواتیں' کہا جاتا ہے۔

دو متغیرات میں ہمزاد مساواتوں کا حل، اعداد کا ایک ترتیب وار جوڑا ہوتا ہے جو ہر مساوات کا حل فراہم کرتا ہے۔

مثال :

$$x + y = 24$$
$$x - y = 2$$

حل سیٹ ہے $\{(13, 11)\}$ جو دونوں مساوات کا بیک وقت حل فراہم کرتا ہے۔

$$13 + 11 = 24$$
$$13 - 11 = 2$$

ہمزاد مساواتیں حل کرنے کے طریقے

1- متبادل طریقہ

مثال : حل کیجیے

$$x + y = 4 \ldots \text{(i)}$$
$$x - y = 2 \ldots \text{(ii)}$$

نکات جن پر عمل کرنا ہے :

1- پہلی مساوات کے لیے x کو حل کیجیے :

$$x + \mathrm{y} = 4$$
$$x = 4 - y$$

2- اس اظہاریے کا دوسری مساوات میں x سے تبادلہ کیجیے اور y کو حل کیجیے :

$$x - y = 2$$
$$(4 - y) = y = 2 = 4 - 2y = 2$$
$$-2y = 2 - 4$$
$$-2y = -2$$
$$y = 1$$

3- y کی اس قدر کو پہلے نکتے کی مساوات میں رکھیے۔

$$x = 4 - y$$

مساوات کو حل کرنا :

$x + 3 = 9$

$x + 3 - 3 = 9 - 3$ (3 + کے متضاد 3 کو دونوں اطراف جمع کرنے سے)

$x = 6$ (مساوات کی جمعی خصوصیت)

حل سیٹ ہے $= \{6\}$

مثال : $x - 8 = 6$ کو حل کیجیے۔

$x - 8 = 6$

$x - 8 + 8 = 6 + 8$ (دونوں اطراف 8 + جمع کرتے ہوئے)

$x - \{14\}$ (مساوات کی جمعی خصوصیت)

حل سیٹ ہے $= \{14\}$

مسائل میں مساوات کا استعمال

مساوات کا حل تلاش کرنے میں ہم نے جو صلاحیت حاصل کی ہے وہ اکثر ہمیں عبارتی مسائل حل کرنے میں بھی مدد دیتی ہے۔

کوئی بھی عبارتی مسئلہ حل کرنے کے لیے دیے گئے نکات پر ترتیب سے عمل کریں۔

1- مسئلے کو کئی بار پڑھیں پھر فیصلہ کریں کہ کیا اعداد پوچھے گئے ہیں اور کیا معلومات دی گئی ہے۔ ایک خاکہ بنانا مفید ہو گا۔

2- ایک متغیر کا انتخاب کریں اور اسے دیے گئے حقائق کے ساتھ استعمال کریں تا کہ مسئلے میں بیان کیا گیا عدد پیش کیا جا سکے۔

3- مسئلے کو پڑھیں پھر ایک کھلا جملہ لکھیں جو مسئلے میں دیے گئے اعداد کے تعلق کو ظاہر کرے۔

4- کھلے جملے کو حل کریں اور مطلوبہ اعداد (عدد) حاصل کریں۔

5- اپنے نتیجے کی عبارتی مسئلے سے پڑتال کریں، جواب دیں۔

مثال: $x^2 + x - 6$ کے اجزائے ضربی بتایئے۔

$$\begin{aligned} & x^2 + x - 6 \\ &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ &= (x^2 + 3x) - (2x + 6) \\ &= x(x + 3) - 2(x + 3) \\ &= (x + 3)\,(x - 2) \end{aligned}$$

یہ ذہن میں رکھیے جب سہ درجی اظہاریوں کے اجزائے ضربی معلوم کیے جا رہے ہوں تو ضرب اور جمع کے تمام کلیوں کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

سادہ مساوات

مساوات پر ایک نظر ڈالیے۔

$$10 - 4 = 6,\ 5x - 1 = 9,\ a + 3 = 3 + a$$

ایک مساوات دو اعداد یا متغیر اظہاریوں (جنھیں سمتیں کہتے ہیں) کے درمیان '=' نشان لگانے سے بنتی ہے۔

جملے جن میں متغیرات ہوں جیسے مساوات $5x - 1 = 9$ اور $a + 3 = 3 + a$ 'کھلے جملے' کہلاتے ہیں۔

جب ہم ایک کھلے جملے میں کسی عدد کو متغیرات سے بدل دیتے ہیں تو ہمیں ایک ایسا بیانیہ ملتا ہے جو غلط یا صحیح ہوسکتا ہے۔

مثال: x کی قدر معلوم کیجیے جس کے لیے $5x - 1 = 9$ ایک صحیح بیانیہ ہے۔

x کو 1، 2 یا 3 سے تبدیل کر دیجیے۔

$$5x - 1 = 9$$

$5\,(1) - 1 = 0$	(غلط)
$4 = 9$	(غلط)
$5\,(2) = 1 = 0$	(صحیح)
$5\,(3) = 1 = 9$	(غلط)

لہٰذا x کی مطلوبہ قدر 2 ہے۔ ایک ایسے متغیر کی کوئی بھی قدر جو ایک کھلے جملے کو ایک درست بیانیہ میں تبدیل کرتی ہے۔ وہ جملے کا 'حل' کہلاتی ہے۔ یہ جملہ کو 'صحیح' کرتی ہے۔

کسی کھلے جملے کے حلوں کا سیٹ جملے کا 'حل سیٹ' کہلاتا ہے۔ حل سیٹ کو تلاش کرنا جملے کو 'حل کرنا' ہے۔ ہم حل سیٹ دکھانے کے لیے درمیان خطوط وحدانی استعمال کر سکتے ہیں۔ اسی طرح درج بالا مثال کے لیے بھی ہم یہی کہہ سکتے ہیں۔

'حل ہے 2'

یا حل سیٹ ہے $\{2\}$

3 اور 4 کا حاصل　　3 اور 4 کی جمع

$$(x + 3)\ (x + 4) = x^2 + 7x + 12$$

+3 اور +4 کا حاصل　　+3 اور +4 کی جمع

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ :

$$(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + ab$$

اس قسم کے کثیر رقمی اظہاریوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کی تکنیک $ax^2 + bx + c$ ہے۔

1- ان اجزائے ضربی کے جوڑوں کی فہرست بنایئے جن کا حاصل مستقل رقم کے مساوی ہو۔

2- فہرست میں اجزائے ضربی کے وہ جوڑے تلاش کیجیے جن کی جمع درمیانی رقم کے عددی سر کے مساوی ہو۔

مثال : اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔ $x^2 + 5x + 6$

$$2 \times 3 = 6$$
$$1 \times 6 = 6$$

1- چونکہ درمیانی رقم کا عددی سر 5 ہے جو مثبت عدد ہے اس لیے 6 کے مثبت جوڑوں کی فہرست بنایئے۔

2- وہ اجزائے ضربی تلاش کیجیے جن کی جمع $(5 = 3 + 2)$3 اور 2 : 5 ہو۔

3- $x^2 + 5x + 6$ کو دوبارہ اس طرح لکھیے۔

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= x(x^2 + 3) + (2x + 6) \\ &= x(x + 3) + 2(x + 3) \\ &= (x + 3)\ (x + 2) \end{aligned}$$

مثال : اجزائے ضربی بنایئے ۔ $x^2 - 5x + 6$

1- چونکہ $5 > 0,$ لہٰذا 6 کے منفی اجزائے ضربی پر توجہ دیں۔

2- 6 کے اجزائے ضربی کا چناؤ کیجیے جن کی جمع 5 یعنی 2 اور 3 ہو۔

3- $x^2 - 5x + 6$ کو دوبارہ اس طرح لکھیے۔

$$\begin{aligned} &= x^2 - 3x - 2x + 6 \\ &= x(x - 3) - (2x - 6) \\ &= x(x - 3) - 2(x - 3) \\ &= (x - 2)\ (x - 3) \end{aligned}$$

مثال : $x^2 + x - 6$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

-6 کے اجزائے ضربی ہیں 3 اور 2۔

$$\begin{aligned} & 3 + (-2) = 1 \\ &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ &= (x^2 + 3x) - (2x + 6) \\ &= x(x + 3) - 2(x + 3) \\ &= (x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

کیا درمیانی رقم پہلی اور آخری رقموں کے جذروں کے حاصل کا دگنا ہے۔

مثال : کیا $81x^2 + 90xy + 25y^2$ ایک سہ درجی مربع ہے؟

پہلی رقم $81x^2$ ، $9x$ کا مربع ہے۔

آخری رقم $25y^2$ ، $5y$ کا مربع ہے۔

درمیانی رقم $90xy$ ، $81x^2$ اور $25y^2$ کے جذروں کا مکرر حاصل ہے۔

اس طرح $81x^2 + 9xy + 25y^2$ ایک مکمل مربع ہے۔

مثال : کیا $100c^2 + 30cd + 9d^2$ مکمل مربع ہے؟

$$\sqrt{100c^2} = 10c, \sqrt{9d^2} = 3cd$$

لیکن $2(10c)\,(3d) = 60cd \neq 30cd$

$$(10c + 3d)^2 = (10c)^2 + 2(10c)\,(3d) + (3d)^2$$

$$100c^2 + 60cd + 9d^2$$

اس طرح $100c^2 + 30cd + 9d^2$ ایک مکمل مربع نہیں ہے کیونکہ اس کے لیے درمیانی رقم 60cd ہونی چاہیے تھی 30cd نہیں۔

ایک مکمل مربع والے اظہاریے کے اجزائے ضربی بنانا

مثال : اجزائے ضربی بنایئے : $81x^2 + 90xy + 25y^2$

$$81x^2 + 90xy + 25y^2$$

$$= (9)x^2 + 2(9)x\,(5y) + (5y^2)$$

$= (9x + 5x)^2 = (9x + 5y)\,(9x + 5y)$ اجزائے ضربی ہیں۔

اجزائے ضربی بنایئے : $36a^2 - 84ab + 49b^2$

$$36a^2 - 84ab + 49b^2$$

$$= (6a)^2 - 2(6a)\,(7b) + (7b)^2$$

$= (6a - 7b)^2 = (6a - 7b)\,(6a - 7b)$ اجزائے ضربی ہیں۔

$ax^2 + bx + c$ کی طرز کے اظہاریوں کے اجزائے ضربی بنانا

$(x + b)\,(x + b)$ کی شکل کے حاصل کے طور پر سہ درجیوں کے اجزائے ضربی بنائے جا سکتے ہیں جہاں a اور b یا تو مثبت ہیں یا منفی۔

اب ان حاصلات پر نظر ڈالیں۔

$$(x + 3)\,(x + 4) = x2 + 7x + 12$$

اظہاریے کے اجزائے ضربی ہیں :

$(ax + 2bcy)$ اور $8a^2bc$

مثال : اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔ $ax + ay + bx + by$

دونوں رقموں کے آپس میں گروپ بنانا

$$(ax + ay) + (bx + by) = a(x + y) + b(x + y)$$
$$= (x + y)\ (a + b)$$

اب $(x + y)$ کو ایک مشترک جزو ضربی سمجھیے۔

اجزائے ضربی ہیں۔ $(a + b)$ اور $(x + y)$

$$(a + b)\ (x + y)$$
$$= ax + ay + bx + by$$

کبھی کبھی رقموں کو اس انداز میں ترتیب دیا جاتا ہے کہ ان کے اجزائے ضربی بنانے میں آسانی رہے۔

مثال : اجزائے ضربی بنایئے : $axy - bcz + bcxy - az$

رقموں کی ترتیب بدلتے ہوئے :

$$axy - bcxy - az - bcz$$

رقموں کو گروپ میں تبدیل کرتے ہوئے :

$$(axy + bcxy) - (az + bcz)$$

مشترک اجزائے ضربی تلاش کرنا :

$$xy(a + bc) - z(a + bc) = (a + bc)\ (xy - z)$$

اجزائے ضربی ہیں $(a + bc)$ اور $(xy - z)$

$a^2 \pm 2ab + b^2$ کی قسم کے اظہاریے کے اجزائے ضربی بنانا

مساوات کے یکساں جزو کی خصوصیت کی مدد سے ہم کلیات کو دوبارہ لکھ سکتے ہیں تاکہ دو درجی اظہاریوں کو مربع کر کے ایسی صورت بنائی جائے جو اجزائے ضربی میں مددگار ثابت ہو۔

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)\ (a + b)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)\ (a - b)$$

مساوات کے بائیں سمتوں کے اظہاریے 'سہ درجی مربع' یا 'مکمل مربع' کہلاتے ہیں کیونکہ ہر اظہاریے میں تین رقمیں ہیں اور وہ دو درجی کا مربع ہے۔

یہ فیصلہ کرنے کے لیے کہ ایک سہ درجی اظہاریے ایک سہ درجی مربع ہے یا نہیں مندرجہ ذیل سوالات کیجیے :

کیا پہلی رقم مربع ہے؟

کیا آخری رقم مربع ہے؟

اجزائے ضربی بنانا (Factorisation)

جب ہم لکھتے ہیں :

$72 = 9 \times 8$ یا $72 = (2)\ (36)$

تو ہم نے 72 کو اجزائے ضربی میں تبدیل کر دیا۔

پہلی صورت میں اجزائے ضربی 9 اور 8 ہیں۔

دوسری صورت میں 2 اور 36 ہیں۔

الجبرا میں ہم ایک کثیر رقمی اظہاریہ کے اجزائے ضربی ، دوسری کثیر رقم اظہاریہ کا حاصل ظاہر کر کے کرتے ہیں۔

ہم ایک کثیر رقمی اظہاریہ کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے تقسیم کا استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال : $bx + by$ میں

دونوں کو b سے تقسیم کرتے ہوئے۔

$$bx/b + by/b$$
$$= (x + y)$$

$x + y$ کو b سے ضرب دے کر ہم حاصل کرتے ہیں $bx + by$

لہٰذا $bx + by$ کے اجزائے ضربی ہیں b اور $(x + y)$

$ka + kb + kc$ کی قسم کے اظہاریے کے اجزائے ضربی کرنا :

اس اظہاریے میں k تمام رقموں کا ایک مشترکہ جزو ضربی ہے لہٰذا (k) اور $(a + b + c)$

$ka + kb + kc$ کے اجزائے ضربی ہیں۔

مثال : $8cx + 10cy + 10cz$ کو اجزائے ضربی میں تبدیل کریں۔

2c اظہاریے میں رقم کا مشترک جزو ضربی ہے۔

ہر رقم کو 2c سے تقسیم کر کے حاصل کرتے ہیں :

$$8cx/2c + 10cy/2c + 12cz/2c$$
$$= (4x + 5y + 6z)$$

اظہاریے کے اجزائے ضربی ہیں :

2c اور $(4x + 5y + 6z)$

مثال : $8a^2\ bcx + 16a^2b^2c^2y$ کے اجزائے ضربی بنائیے۔

دونوں رقموں میں مشترک جزو ضربی ہے $8a^2bc$

ہر رقم کا $8a^2bc$ سے تقسیم کرنا

$$8a^3bcx/8a^2bc + 16a^2b^2c^2y/8a^2bc = ax + 2bcy$$

دوسرے خطوط وحدانی اس ترتیب سے ہٹائے جائیں گے۔ چھوٹے خطوط وحدانی ، درمیانے خطوط وحدانی اور بڑے خطوط وحدانی۔

اگر خطوط وحدانی سے پہلے کوئی رقم دی گئی ہو تو اندر کی تمام رقمیں اس سے ضرب دی جائیں گی۔ اگر باہر نفی کی علامت ہو تو خطوط وحدانی میں موجود تمام رقم کی علامات تبدیل ہو جائیں گی۔

کسی خطوط وحدانی میں دیے گئے اظہاریے کو DMAS اصول کے مطابق سادہ بنانا چاہیے۔

یعنی پہلے تقسیم ، پھر ضرب ، پھر جمع اور آخر میں تفریق۔

مثال : سادہ بنائیے :

	$2x - [x - \{3x - (x - 2y - 1)\}]$
خط اشتراک کو ہٹانا	$2x - [x - \{3x - (x - 2y + 1)\}]$
چھوٹے خطوط وحدانی کو ہٹانا	$2x - [x - \{3x - x + 2y - 1\}]$
درمیانے خطوط وحدانی کو ہٹانا	$2x - [x - 3x - x + 2y + 1]$
مماثل رقوم کو حل کرنا	$2x - x + 3x - x + 2y - 1$
	$3x + 2y - 1$

$$
\begin{array}{r}
3x^2 + 2x - 4 \\
\times \quad 2x^2 - 4x + 5 \\
\hline
6x^4 + 4x^3 - 8x^2 \qquad\qquad\qquad \\
-12x^3 - 8x^2 + 16x \qquad \\
+15x^2 + 10x - 20 \\
\hline
6x^4 - 8x^3 \quad - x^2 + 26x - 20
\end{array}
$$

کثیر رقمی اظہاریوں کی تقسیم

ایک کثیر رقمی اظہاریے کی دوسرے سے تقسیم عام طویل تقسیم کی طرح ہے۔ کثیر رقمی اظہاریوں کو تقسیم کرتے وقت ہمیں یہ یقین کر لینا چاہیے کہ ہر کثیر رقمی اظہاریے کی رقمیں متغیر میں نزولی ترتیب رکھتی ہیں۔ تقسیم اس وقت ختم ہوتی ہے جب باقی بچ جانے والا یا تو صفر ہو یا تقسیم کنندہ سے چھوٹا ہو۔

مثال: $8x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 22x - 15$ کو $4x^2 + 2x - 3$ سے تقسیم کیجیے۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 4x + 5 \\
\hline
4x^2 + 2x - 3 & 8x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 22x - 15 \\
 & \pm 8x^4 \pm 4x^3 \mp 6x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -16x^3 + 12x^2 + 22x - 15 \\
 & \qquad \mp 16x^3 \mp 8x^2 \pm 12x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad + 20x^2 + 10x - 15 \\
 & \qquad\qquad \pm 20x^2 \pm 10x \mp 15 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad x
\end{array}
$$

حاصل قسمت $2x^2 - 4x + 5$ ہے

الجبری اظہاریوں کو آسان کرنا

الجبرا میں مندرجہ ذیل قسم کے بریکٹس استعمال کیے جاتے ہیں۔

( ) : چھوٹے خطوط وحدانی

{ } : درمیانے خطوط وحدانی

[ ] : بڑے خطوط وحدانی

– : خط اشتراک

جب الجبری اظہاریے میں بریکٹ موجود ہوں تو اسے سادہ بنانے کا آغاز پہلے خط اشتراک سے کیجیے۔

الجبرا (Algebra)

کثیر رقمی اظہاریوں کی جمع اور تفریق

دو کثیر رقمی اظہاریوں کو جمع کرنے کے لیے ہم رقم درج کرتے ہیں اور یکساں علامات والی رقوم کو جمع کر کے سادہ بناتے ہیں۔ اگر ان اظہاریوں کو صعودی یا نزولی انداز میں ترتیب دیا جائے تو سہولت ہو جاتی ہے۔

مثال : جمع کرنے کے لیے :

$3x - 2x^3 + 3x^2 - 4$ اور $6x + 7 + 2x^3 - 5x^2$

اظہاریوں کی نزولی صورت میں ترتیب دینا اور انھیں عمودی انداز میں لکھنا

$$\begin{array}{r} +3x^2 + 3x - 4 \\ \underline{-5x^2 + 6x + 7} \\ \underline{-2x^2 + 9x + 3} \end{array}$$

کثیر رقمی اظہاریوں کی تفریق بالکل اسی طرح ہے جیسے حقیقی اعداد کی تفریق۔

کسی عدد کو گھٹانے کے لیے ہم اس عدد کی ضد کو جمع کرتے ہیں۔ کثیر رقمی اظہاریے کو تفریق کرنے کے لیے ہم ہر رقم کی ضد کو جمع کرتے ہیں تا کہ اسے آسان بنایا جائے۔

مثال : $8x^4 - 3x^2 + 4x - 6$ میں سے $3x^4 - 5x^2 + 5x - 3$ تفریق کیجیے۔

اظہاریوں کو عمودی شکل میں لکھنا

$$\begin{array}{r} 8x^4 - 3x^2 + 4x - 6 \\ 3x^4 - 5x^2 + 5x - 3 \\ \underline{- \quad + \quad - \quad +} \\ \underline{5x^4 + 2x^2 - x - 9} \end{array}$$

(مخالف کو تبدیل کرتے ہوئے)

کثیر رقمی اظہاریوں کا ضرب

جب ہم ایک ہی اساس کی حامل دو قوتوں کو ضرب دیتے ہیں تو، ہم قوت نما کو جمع کرتے ہیں جیسا کہ ذیل میں دکھایا گیا ہے :

$$x^2 . x^5 = x^{2+5} = x^7$$

ضرب کے لیے قوت کا اصول ہے : ہر مثبت صحیح اعداد m اور n کے لیے

مثال : $3x^2 + 2x - 4$ کو $2x^2 - 4x + 5$ سے ضرب دیجیے۔

اظہاریوں کو عمودی شکل میں ترتیب دیجیے:

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

محصول آمدنی

کوئی شخص ایک سال میں جتنا کماتا ہے وہ اس کی 'کل آمدنی' کہلاتی ہے۔

اس کل آمدنی کا ایک مخصوص حصہ جو وہ حکومت کو ادا کرتا ہے 'محصول آمدنی' یا 'انکم ٹیکس' کہلاتی ہے۔ بقیہ آمدنی اس کی 'خالص آمدنی' کہلاتی ہے۔

مختلف قیمتوں پر انکم ٹیکس کی کٹوتیوں کا ایک جدول بنایئے اور اسے سبق پڑھاتے ہوئے دکھایئے۔ ٹیکس کی ذمہ داری پر چھوٹ کی کٹوتی % ہے۔

واجب الادا انکم ٹیکس معلوم کرنا

مثال: ایک آدمی کی سالانہ آمدنی 13,550,00 روپے ہے۔ اس پر کتنا انکم ٹیکس واجب الادا ہو گا؟

کل آمدنی = 13,550,00 روپے

رقم جو 12,00,000 روپے سے متجاوز ہے = 1,355,000 روپے

_ 1,200,000 روپے

155,000 روپے

چونکہ اس کی آمدنی 24,00,000 روپے سے متجاوز نہیں لہٰذا انکم ٹیکس کی شرح ہو گی 5%۔

1,55,000 روپے پر انکم ٹیکس ہو گا $1,55,000 \times \frac{5}{100} = 7750$ روپے

لہٰذا انکم ٹیکس = 7750 روپے

Income Tax Slabs 2018–2019

Salary per annum		Income tax rate
1.	Up to Rs. 1,200,000	0%
2.	Rs. 1,200,001 to 2,400,000	5%
3.	Rs. 2,400,001 to 4,800,000	10%
4.	Rs. 4,800,001 and above	15%

10 روپے پر یہ منافع ہو گا $10/50 \times 100 = 20\%$

لاگت = 50 روپے

قیمت فروخت = 40 روپے

نقصان ہوا 10 روپے = $50 - 40$

لاگت (50 روپے) پر نقصان ہے 10 روپے۔ لاگت (ایک روپیہ) پر نقصان ہے 10/50

100 پر نقصان ہو گا $20\% = 10/50 \times 100$

نوٹ : منافع اور نقصان کی فی صد ہمیشہ لاگت سے معلوم کی جاتی ہے۔

بیمہ

کسی گھر ، کار یا دوسری قیمتی اشیا کو نقصان سے محفوظ رکھنے کے لیے ان کا بیمہ کروایا جاتا ہے۔ بیمہ کروانے والا ایک مخصوص رقم بطور ، پریمیئم ، انشورنس کمپنی کو ادا کرتا ہے۔ یہ رقم ، ان چیزوں کی کل قیمت کی ایک مخصوص فی صد سے شمار کی جاتی ہے۔ یہ فی صد' پریمیئم کی شرح' کہلاتی ہے۔

پریمیئم معلوم کرنے کے لیے :

مثال : ایک آدمی 500,000 پر اپنی زندگی کا بیمہ کرواتا ہے۔ وہ آدمی 2/12 فی صد کی شرح سے سالانہ کتنا پریمیئم ادا کرے گا؟

100 روپے پر وہ 2.50 روپے پریمیئم ادا کرتا ہے۔

500,000 پر وہ ادا کرے گا $500,000 \times \frac{2.50}{100}$

سالانہ پریمیئم 500,12 = روپے

پریمیئم کی شرح معلوم کرنے کے لیے :

مثال : ایک شخص اپنی زندگی کا بیمہ 450,000 روپے میں کرواتا ہے اور سالانہ پریمیئم کے طور پر 13,500 روپے ادا کرتا ہے۔ بتایئے اس کے پریمیئم کی شرح کیا ہے؟

وہ 450,000 پر 13,500 روپے ادا کرتا ہے۔

وہ 100 روپے پر ادا کرتا ہے۔ $13,500/450,000 \times 100 = 3$ روپے

لہٰذا اس کے پریمیئم کی شرح 3% ہے۔

فی صد، بیمہ، محصولِ آمدنی (Percentage, Insurance, and Taxation)

ایک عدد کے دوسرے عدد سے تناسب کو بطور فی صد بھی واضح کیا جا سکتا ہے۔ لفظ 'فی صد' (جس کی علامت % ہے) کا مطلب ہے 'سوواں' یا 100 سے تقسیم کیا ہوا۔

مثال: 29/100 کو 29 فی صد کہا جاتا ہے اور اس طرح لکھا جاتا ہے 29% ۔

ہم ایک مقدار کو دوسری مقدار کی فی صد کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثال: 3 کو 5 کے فی صد کے طور پر ظاہر کریں۔

100 کا 3/5

$= 3/5 \times 100 = 300/5 = 60\%$

اس کا مطلب ہے کہ 3، 5 کا 60% ہے۔

فی صد کا اطلاق

فی صد بڑے پیمانے پر استعمال کیا جاتا ہے کیونکہ اس کا اطلاق زکوٰۃ، کمیشن، رعایت اور محصولات پر ہوتا ہے۔

نفع اور نقصان

کسی بھی چیز کی لاگت اس کی اصل قیمت ہے۔ اس کی قیمت فروخت وہ ہے جس پر اسے فروخت کیا جاتا ہے۔

اگر قیمت فروخت لاگت سے زیادہ ہو تو دکاندار کو منافع ہوتا ہے۔

مثال: لاگت ہے 50 روپے

قیمت فروخت ہے 60 روپے

منافع ہے 10 روپے = 50 − 60

مثال: لاگت ہے 50 روپے

قیمت فروخت ہے 40 روپے

نقصان ہوا 10 روپے = 40 − 50

نفع اور نقصان کو فی صد میں ظاہر کرنے کے لیے:

لاگت = 50

قیمت فروخت = 60

نفع 50 − 60 = 10

لاگت (50 روپے) پر منافع ہوا 10 روپے

آدمی اور دنوں میں تناسب، معکوس ہے۔

دن	:	آدمی	:	کام
3		30		1/3
5		x	.	2/3
(بالواسطہ تناسب)				(راست تناسب)

(تیروں کے نشان کے مطابق)

$$1/3 \times x \times 5 = 2/3 \times 30 \times 3$$

$$5/3 \times 3/5 \times x = 2 \times 3 \times 30 \times 3/3 \times 5$$

$$x = 36$$

$36 - 30 = 6$ یعنی مزید 6 آدمیوں کو ملازم رکھنا ہوگا۔

مرکب تناسب (Compound Proportion)

تناسب کی ایک اور قسم جس میں دو سے زیادہ تناسب شامل ہوں 'مرکب تناسب' کہلاتا ہے۔

کسی مرکب تناسب کو حل کرنے کے لیے ہم اسے دو یا زیادہ ، آسان تناسبوں میں تقسیم کر دیتے ہیں۔

مثال : اگر 14 آدمی ایک کام 5 گھنٹے روزانہ کر کے 8 دن میں مکمل کر سکتے ہیں تو 35 آدمیوں کو وہ کام 4 دن میں مکمل کرنے کے لیے روزانہ کتنے گھنٹے درکار ہوں گے۔

توجیہہ : کم آدمی زیادہ دن۔کم گھنٹے زیادہ دن

آدمیوں اور دنوں میں یہ تناسب ، معکوس ہے اور گھنٹوں اور دنوں میں بھی یہ تناسب معکوس ہے۔

(وہ مقدار جو معلوم کرنی ہو اسے درمیان میں رکھیں۔)

	دن	:	گھنٹے	:	آدمی
(معکوس)	8	←	5	←	14
(معکوس)	4	←	x	←	35

ہم انھیں ایک دوسرے سے ضرب دیتے ہیں جیسے تیر کے نشان سے واضح کیا گیا ہے۔

$$14 \times 5 \times 8 = 35 \times 4 \times x$$

$$\frac{14 \times 5 \times 8}{35 \times 4} = \frac{35 \times 4 \times x}{35 \times 4}$$

$x =$ 4 گھنٹے

زیادہ آدمی کم دنوں میں کام کریں گے تو وہ روزانہ کم گھنٹے صرف ہوں گے۔

مثال : 30 آدمیوں کو ایک کام 8 دنوں میں مکمل کرنے کے لیے ملازم رکھا گیا ہے لیکن کام کا 1/3 حصہ ، 3 دنوں میں مکمل ہو سکا۔ بتایئے کہ اس کام کو وقت پر مکمل کرنے کے لیے مزید کتنے آدمیوں کو ملازم رکھنا ہو گا۔

دن	:	آدمی	:	کام
3	:	30	:	1/3
5	:	x	:	2/3

توجیہ : زیادہ آدمی کم دن ، کم کام کم آدمی۔

کام اور دنوں میں تناسب ، راست ہے۔

مثال: $1111_2 - 231_5 - 360_{10}$ کو حل کریں۔

اعداد کو اساس 10 میں تبدیل کرنا۔

$$231_5 = 50 + 15 + 1 = 66_{10}$$
$$1111_2 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15_{10}$$
$$= 360_{10} - 231_5 - 1111_2$$
$$= 360_{10} - 66_{10} - 15_{10}$$
$$= 360_{10} - 81_{10}$$
$$= 279_{10}$$

ہم مختلف اساس والے اعداد کو اساس دس میں تبدیل کر کے ان کا حاصل پا سکتے ہیں۔

مثال: $241_5 \times 1011_2$

اعداد کو اساس 10 میں تبدیل کرنا۔

$$241_5 = 50 + 20 + 1 = 71_{10}$$
$$1011_2 = 8 + - 2 + 1 = 11_{10}$$
$$= 241_5 \times 1011_2$$
$$= 71_{10} \times 11_{10}$$

حاصل کو جمع کرنا

$$\begin{array}{r} 1234_5 \\ +\ \underline{21310_5} \\ \underline{\underline{23044_5}} \end{array}$$

مثال : ضرب دیجیے۔ 342_5 اور 32_5

$$\begin{array}{r} 342_5 \\ \times\ 32_5 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

پہلے ہم 342_5 کو 2 سے ضرب دیں گے۔

$$\begin{array}{l} 342_5 \\ 2_5 \\ \hline 1234_5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 4 \times 2 = 8 = 13_5 \\ 3 \times 2 = 6 + 1 = 7 = 12_5 \end{array}$$

اب ہم 342_5 کو 3_5 سے ضرب دیں گے۔

$$\begin{array}{l} 342_5 \\ \times\ 3_5 \\ \hline 2131_5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2 \times 3 = 6 = 1 = 1_5 \\ 4 \times 3 = 12 + 1 = 13 = 2 = 3_5 \\ 3 \times 3 = 9 + 2 = 11 = 2 = 1_5 \end{array}$$

مختلف اساسوں والے اعداد پر عمل

اظہاریے کو آسان بنانے کے لیے ہمیں تمام اعداد کو یکساں اساسی نظام میں تبدیل کرنا ہوگا۔ یہ زیادہ آسان ہے اگر ہم ان تمام اعداد کو اعشاری یا اساس 10 کے نظام میں تبدیل کریں۔

مثال : $110111_2 + 21413_5 + 457_{10}$

اساس 10 کے نظام میں تبدیل کرنے کے لیے :

$$110111_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 32 + 16 + 0 + 4 + 2 + 1$$

$$= 55_{10}$$

$$21413_5 = 2 \times 5^4 + 1 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 3 \times 5^0$$

$$= 1250 + 125 + 100 + 5 + 3$$

$$= 1483_{10}$$

$$= 110111_2 + 21413_5 + 457_{10}$$

$$= 55_{10} + 1483_{10} + 457_{10}$$

$$= 1995_{10}$$

اعشاری نظام کو اساس پانچ کے نظام میں تبدیل کرنا

اساس 10 کے عدد کو اساس 5 میں تبدیل کرنے کے لیے ہم تقسیم کا طریقہ استعمال کرتے ہیں جس میں بار بار بقیہ حاصل ہوتے ہیں جیسے کہ ثنائی نظام میں ہوتا ہے۔ یہ تقسیم اس وقت تک جاری رہتی ہے جب تک 5 سے کم حاصل قسمت حاصل نہ ہوجائے۔ مثال 47_{10} کو اساس پانچ میں تبدیل کرنا۔

5	47	Remainder
5	9	—2
5	1	—4
5	0	—1

جواب ہے : 142_5

اساس پانچ کے نظام کو اعشاری نظام میں تبدیل

اساس پانچ کے عدد کو اعشاری عدد میں تبدیل کرنے کے لیے ہم اس عدد کو اس کے مقام کے اعتبار سے متعلقہ 5 کی قوت سے ضرب دیتے ہیں جس سے ہمیں جواب حاصل ہوتا ہے۔

مثال : 24_5 کو اساس 10 میں تبدیل کیجیے۔

$$24_5$$

$$(2 \times 5^1) + (4 \times 5^0)$$ (پانچ کی قوت سے ضرب دیتے ہوئے)

$$10 + (4 \times 1)$$

$$10 + 4$$

$$= 14_{10}$$

اساس پانچ سے ضرب دینا

جدول کو مکمل کرنا

x	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

ضرب کی جدول کو استعمال کرتے ہوئے ہم اساس پانچ کے نظام میں اعداد کا حاصل ضرب جان سکتے ہیں۔

تفریق کے جوابات کی تصدیق کے لیے انھیں اعشاری نظام میں تبدیل کیجیے۔

مثال :

$$\begin{array}{r} 110_2 \\ -101_2 \\ \hline 001_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6_{10} \\ -5_{10} \\ \hline 1_{10} \\ \hline \end{array}$$

جب جمع اور تفریق کی علامتوں کے ساتھ سوالات کو حل کیا جا رہا ہو تو DMAS قانون پر عمل کرنا چاہیے یعنی پہلے جمع کریں اور پھر تفریق کریں۔

ثنائی اعداد کا ضرب

درج ذیل جدول کو مکمل کیجیے۔

×	0	1
0		
1		

ثنائی نظام میں '0' اور '1' کا ضرب بالکل ایسا ہی ہے جیسے اعشاری نظام میں یعنی :

$$0 \times 0 = 0$$

$$1 \times 0 = 0$$

$$0 \times 0 = 0$$

$$1 \times 1 = 1$$

لہٰذا ضرب اسی انداز میں کیا جاتا ہے جیسے اعشاری نظام میں۔

مثال : 110_2 اور 11_2 کا حاصل ضرب تلاش کیجیے۔

$$\begin{array}{r} 110_2 \\ \times 11_2 \\ \hline 110_2 \\ \hline 110_2 \\ \hline 10010_2 \\ \hline \end{array}$$

جوابات کی تصدیق کے لیے ثنائی اعداد کو اعشاری اعداد میں تبدیل کیجیے۔

$$\begin{array}{rcr} 110_2 & & 6_{10} \\ \text{x}11_2 & & 3_{10} \\ \cline{1-1} 110 & (=6) & \\ \cline{1-1} 1100 & (=12) & 18_{10} \\ \cline{1-1} 10010_2 & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

ثنائی نظام میں 2 کو اس طرح لکھا جائے گا 10_2 ۔ لہٰذا جب بھی ثنائی اعداد کو جمع کیا جائے اور ہمیں '2' ملے تو ہم اسے 10_2 میں تبدیل کر دیں گے۔ ہم 0 کو اکائی کے کالم میں لکھتے ہیں اور 1 کو اگلے کالم میں۔

مثال: جمع کیجیے۔

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ +\ 10_2 \\ \hline 111_2 \\ \hline \end{array}$$

جمع کیجیے۔

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ +\ 1001_2 \\ \hline 1110_2 \\ \hline \end{array}$$

جمع کیجیے۔

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ +\ 101_2 \\ \hline 1010_2 \\ \hline \end{array}$$

ثنائی اعداد کی تفریق

مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجیے۔

–	0	1
0		
1		

ثنائی اعداد کو اسی طرح کالموں میں تفریق کیا جا سکتا ہے جیسے ہم اعشاری اعداد کو کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 0 \\ -0 \\ \hline 0_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ -0 \\ \hline 1_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ \hline 0_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ -\ 1 \\ \hline 1_2 \\ \hline \end{array}$$

مندرجہ ذیل کو تفریق کیجیے تا کہ ثنائی نظام میں تفریق کو واضح کیا جا سکے۔

مثال: تفریق کیجیے۔

$$\begin{array}{r} 110 \\ -101_2 \\ \hline 001 \\ \hline \end{array}$$

چونکہ 1 ,0 سے گھٹایا نہیں جا سکتا لہٰذا اگلے کالم سے 2 مستعار لیں اور 1 کو 2 سے گھٹائیں۔

مثال:

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ -11_2 \\ \hline 10_2 \\ \hline \end{array}$$

مطلوبہ ثنائی عدد ہے :

$$23_{10} = 10111_2 = 1 + 2^1 + 2^2 + 0 \times 2^3 + 2^4$$
$$= 1 + 2 + 4 + 0 + 16$$
$$= 23$$

ثنائی اعداد کو اساس دس میں تبدیل کرنا

ہم ایک مندرج قدر کی خاصیت ، ثنائی عدد کو دس کی اساس میں تبدیل کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال : 111_2 کو اعشاری نظام میں تبدیل کیجیے۔

111_2 ,3 ہندسوں پر مشتمل ہے۔

ثنائی اعداد کی مندرج قدریں ہیں : 2^0 2^1 2^2

ثنائی عدد 111_2 کو دائیں جانب سے 2 کی بڑھتی ہوئی قوت سے ضرب دے کر لکھا جا سکتا ہے۔

مندرج قدر	2^0	2^1	2^2
کے اعداد	1	1	1

$$111_2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$= 4 + 2 + 1$$
$$= 7$$

ثنائی اعداد کا عمل

جمع

مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجیے۔

+	0	1
0		
1		

ثنائی اعداد کو کالم میں اسی طرح جمع کیا جا سکتا ہے جیسے ہم اعشاری اعداد کو جمع کرتے ہیں۔

مثال :

$$\begin{array}{r} 0 \\ +0 \\ \hline 0_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +1 \\ \hline 1_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +0 \\ \hline 1_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +1 \\ \hline 10_2 \\ \hline \end{array}$$

اساس پانچ کا عددی نظام

اس نظام میں اعداد کو 5 کی قوت میں ظاہر کیا جاتا ہے یا پھر 5 کے حاصل ضرب کے طور پر۔ اساس پانچ کے نظام میں پانچ علامات استعمال کی ہوتی ہیں جو یہ ہیں :

0, 1, 2, 3 4

اساس پانچ کے اعداد اور ان کے مساوی اساس دس کے اعداد لکھیے۔

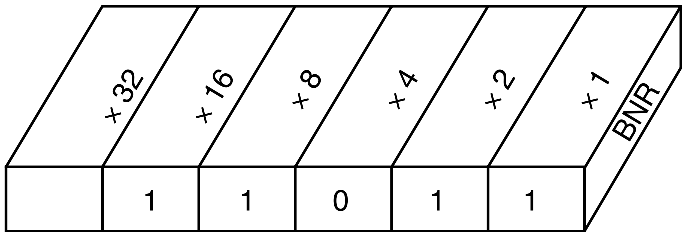
اساس 10 عدد	اساس 2 عدد
1	1
2	2
3	3
4	4
5	10
6	11
7	12
8	13
9	14
10	20

اعشاری نظام کو اساس دو کے نظام میں تبدیل کرنا

کسی بھی اعشاری عدد (اساس 10) کو اساس دو کے عدد میں تبدیل کرنے کے لیے ہم اعشاری عدد کو 'دو' سے بار بار تقسیم کرتے ہیں اور ہر تقسیم پر بقیہ کو حاصل قسمت کے بعد درج کرتے ہیں۔ ہم تقسیم کا سلسلہ جاری رکھتے ہیں تا وقتیکہ ہم بقیہ 0 اور 1 تک نہ پہنچ جائیں۔ ثنائی عدد اس صورت میں حاصل کیا جاتا ہے جب ہم بقیہ کو نیچے سے اوپر تک لکھیں۔

مثال : 23_{10} کو اساس دو کے نظام میں تبدیل کیجیے۔ ہر حاصل قسمت کو 2 سے تقسیم کیجیے۔

2	23	Remainder
2	11	—1
2	5	—1
2	2	—1
2	1	—0
2	0	—1



ضرب کیجیے: $1 \times 16 = 16$

$1 \times 8 = 8$

$0 \times 4 = 0$

$1 \times 2 = 2$

$1 \times 1 = 1$

اب جمع کیجیے: $16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27$

نظام کی اساس کو اکثر عدد کے نیچے درج کیا جاتا ہے تاکہ کوئی الجھن نہ ہو۔

مثال: $11011_2 = 27_{10}$

نوٹ کیجیے کہ یہاں بھی صفر 0 جگہ گھیرتا ہے۔

طلبا کو ثنائی نظام میں 1 سے 12 تک کے اعداد کے اعشاری نظام سے تقابل کی مشق کروائیے۔

اساس 10 کے اعداد	اساس 2 کے اعداد
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100

101, 110 اور 011 سے مختلف ہے۔

'0' بحیثیت مندرج عدد کی اہمیت پر زور دیں۔

ثنائی اور خمسی اعداد کا نظام
(Base Two and Base Five Number system)

ثنائی نظام یا اساس دو کا نظام

اعشاری نظام میں ہم علامتوں مثلاً 9 ... 2 ، 1 ، 0 اور کسی عدد کو پیش کرنے کے لیے ان کی مقامی قدر کا استعمال کرتے ہیں۔ یہ علامتیں ہندسے کہلاتی ہیں۔ ہندسے کی قدر کا انحصار اس جگہ پر ہوتا ہے جو اسے اس عدد میں دی گئی ہو۔

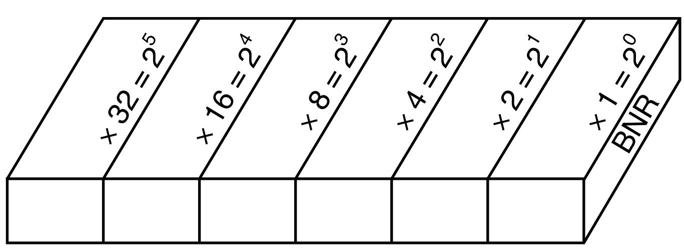
مثال : 124 ایک ایسا عدد ہے جس میں تین ہندسے ہیں 1 ،2 اور 4۔ اس کی قدر ایک سو چوبیس ہے۔ جس میں جگہ کی قدر اس طرح ہے۔ 1 سینکڑہ ، 2 دہائیاں اور 4 اکائیاں۔

1	2	4
سینکڑہ	دہائیاں	اکائیاں
⇕	⇕	⇕
1×100	2×10	4×1

یعنی : $124 = (1 \times 100) + (2 \times 10) + (4 \times 1)$

ہم اس نظام میں دیکھ سکتے ہیں کہ ایک علامت جس جگہ پر ہوتی ہے وہ اس کی جامد قدر ہے۔ اعشاری نظام میں جگہ کی قدریں بہ لحاظ دس کی قوتوں کے ہیں اس لیے اعشاری نظام کو دس پر منحصر نظام بھی کہا جاتا ہے۔ 0 کو جگہ رکھنے والا ہندسہ کہا جاتا ہے اس لیے 240 ,204 اور 24 تمام کی مختلف قدریں ہیں۔

اعداد کا ایک دوسرا نظام جس میں مندرج قدروں کو بہ لحاظ دو کی قوت (مثلاً دو کے گروپ میں گنتی کرنا) کے گنا جاتا ہے 'ثنائی نظام' یا 'اساس دو کا نظام' کہلاتا ہے۔ ثنائی نظام میں ہم اکائیاں ، چار ، آٹھ ... وغیرہ کی رکھتے ہیں۔ ہر جگہ کی قدر دائیں طرف مندرج اعداد کے مقابلے میں دوگنی ہوتی ہے۔ مندرج قدروں کو دو کی قوت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



'ثنائی عدد ریڈر' (Binary Number Reader) میں ہم دو کی اساس والے اعداد لکھ کر ضرب اور جمع کرتے ہیں۔ 11011 کو اساس دو کے نظام سے اساس دس کی قدر میں تبدیل کرنے کے لیے ہم ثنائی عدد ریڈر میں دو کی اساس داخل کرتے ہیں۔

3/7 کا جذر ہے۔ = 0.654 (تین اعشاری درجے تک)

ان اعداد کا جذر جو مکمل مربع نہیں ہیں

وہ اعداد جو مکمل مربع نہیں ہیں، ہم ان کا جذر تقسیم کے طریقے سے معلوم کر سکتے ہیں، جو اعشاری درجوں کے ایک مخصوص عدد تک ہو۔

مثال: 2 کا جذر معلوم کیجیے۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1.4142 \\
\hline
1 & \hat{2}.\overline{00},\overline{00},\overline{00},\overline{00} \\
+\ 1 & -1 \\
\hline
24 & 100 \\
+\ 4 & -\ 96 \\
\hline
281 & 400 \\
+\ 1 & -\ 281 \\
\hline
2824 & 11900 \\
+\ 4 & -11296 \\
\hline
28282 & 60400 \\
+\ 2 & -\ 56564 \\
\hline
 & 3836
\end{array}
$$

$$\sqrt{2} = 1.4142$$

یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ غیر ناطق اعداد جو p/q کے انداز میں نہیں لکھے جا سکتے۔ یہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور q صفر کے مساوی نہیں ہے اور کسور عام میں جیسے، π، $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ وغیرہ میں تبدیل نہیں کیا جا سکتا۔

غیر ناطق اعداد کا جذر بھی اسی انداز سے حاصل کیا جا سکتا ہے جیسے اعشاری کسور کے لیے جو ایک مخصوص عدد تک اعشاری درجات لگانے سے حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح بڑھتے جائیں جیسے مکمل اعداد کے لیے وضاحت کی گئی ہے۔ یہ ذہن میں رکھیں کہ اعشاری نقطہ (حاصل قسمت میں) مکمل حصے کے اعداد ختم ہوتے ہی لگا دیں اور یہ عمل جاری رہے گا تا وقتیکہ اعشاری نقطے کے بعد والا آخری جوڑا بھی استعمال نہیں ہو جاتا۔

مثال: 126.1129 کا مثبت جذر تلاش کیجیے۔

	11.23
1	$1\overline{26}.\ \overline{11}\ \overline{29}$
	−1
21	26
+1	− 21
222	511
+2	− 444
2243	6729
	− 6729
	×

کسور عام کا جذر

اگر شمار کنندہ اور نسب نما، مکمل مربعے ہوں تو پھر ان کا جذر علیحدہ معلوم کیجیے اور پھر حاصل ہونے والی کسر کو حل کیجیے۔

مثال: 4/9 کا جذر معلوم کیجیے۔

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0.666$$

اگر شمار کنندہ اور نسب نما دونوں مکمل مربعے نہیں ہوں تو کسر عام کو اعشاری کسر میں تبدیل کیجیے اور پھر جذر تلاش کیجیے۔

مثال: 3/7 کا جذر معلوم کیجیے۔

3/7 کو ایک اعشاری کسر میں تبدیل کرنا

3/7 = 0.428571

تقسیم کے عمل سے جذر معلوم کرنا۔

	0.654
6	$\hat{0}.\overline{42}\ \ \overline{85}\ \overline{71}$
+ 6	−36
125	685
+1	− 625
1304	6071
	− 5216

جذر (Square Root)

ہم یہ جان چکے ہیں کہ کسی عدد کی تفریق ، اس عدد میں کچھ جمع کرنے کا معکوس ہے اور کسی غیر صفری عدد کو تقسیم کرنا ، اس عدد سے ضرب دینے کا معکوس ہے۔ کسی عدد کو مربع بنانا دراصل اس کا 'جذر' تلاش کرنے کا معکوس ہے۔

اگر $a^2 = b$ ہے تو a کو b کا جذر کہا جائے گا۔

کیونکہ $8^2 = 64$ اور $(-8)^2 = 64$ تو 8+ اور 8 ، 64 کے جذر ہیں۔

علامت $\sqrt{}$ ،کو'جذر کا نشان' کہا جاتا ہے۔ یہ نشان کسی مثبت عدد کے اصل یا غیر منفی جذر کو ظاہر کرتا ہے۔

اس طرح $\sqrt{64} = 8$ اور $-\sqrt{64} = -8$

جذر کے نشان کے نیچے دیا گیا عدد جیسے 64 'زیر جذر' رقم کہلاتی ہے۔ عام طور پر آسانی کے لیے جمع اور تفریق کی علامتوں $(\pm)$ کو مجزور کے ساتھ استعمال کیا جاتا ہے۔

مثال : $\pm\sqrt{64}$ کا مطلب 64 کا مثبت یا منفی جذر ہے۔

تمام حقیقی مثبت اعداد 'a' کے لیے یہ نشان a کے جذر کو ظاہر کرتا ہے۔

اس کا مطلب ہے $(\sqrt{a})^2 = a$

صفر کا صرف ایک جذر ہے جو خود صفر ہے۔ یعنی $\sqrt{0} = 0$

کیونکہ ہر حقیقی عدد کا مربع یا تو مثبت ہے یا صفر، حقیقی اعداد کے سیٹ میں منفی اعداد کا کوئی جذر نہیں ہوتا۔

جذر کی قدریں بہ نظر غائر دیکھی جاسکتی ہیں۔ مثلاً ہم دوسرے جذروں کو حاصل کرنے کے لیے ان جذوروں کا حاصل ظاہر کریں گے جنھیں آپ بخوبی جانتے ہیں۔

مثال : تلاش کیجیے $\sqrt{144} = \sqrt{9 \times 16} = 3 \times 4 = 12$

کسی بھی غیر صفری حقیقی اعداد a اور b کے لیے

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

مثال : معلوم کیجیے $\sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = 8/4 = 2$

کسی بھی غیر منفی ، حقیقی عدد a اور کسی بھی حقیقی مثبت عدد b کے لیے

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

اعشاری کسور کا جذر معلوم کرنے کے لیے:

مثال : 256.009 کا جذر معلوم کیجیے۔ اعداد کا شمار اعشاری نقطے کے بعد کیجیے۔ یہ تین ہے جو ایک طاق عدد ہے۔ اس میں انتہائی دائیں طرف ایک صفر شامل کریں تاکہ جوڑے بن جائیں۔

$$\hat{2}\overline{56}.\overline{00}\,\overline{90}$$

اعداد یا متغیر اظہاریوں (جنھیں عدم مساوات کی سمتیں کہا جاتا ہے) میں عدم مساوات کے نشانات (< ,>) لگا کر عدم مساوات بنائی جاتی ہے۔

ایسی عدم مساوات جس میں ایک متغیر ہو 'کھلا جملہ' کہلاتا ہے۔

مثال: $5x - 1 = 9$

اگر متغیر کی قدر معلوم کر کے اس اظہاریے میں لگادی جائے تو یہ عدم مساوات حل کی جا سکتی ہے۔ یہ قدریں 'عدم مساوات کے حل' کہلاتی ہیں۔ یہ عدم مساوات کے ''حل سیٹ'' بناتی ہیں۔

مثال: اگر $a - \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ تو $a + 7 < 9$ کا حل کیا ہوگا۔

a کی قدر کو بدلنے سے:

$a + 7 < 9$

$-1 + 7 < 9$ (صحیح)

$0 + 7 < 9$ (صحیح)

$1 + 7 < 9$ (صحیح)

$2 + 7 < 9$ (غلط)

$3 + 7 < 9$ (غلط)

$4 + 7 < 9$ (غلط)

لہٰذا حل ہے: $\{-1, 0, 1\}$

مثال: عدم مساوات کی خصوصیات استعمال کرتے ہوئے حل سیٹ معلوم کریں۔

(x ایک فطری عدد ہے) $7x - 10 < x + 8$ جہاں $x \in N$

(جمعی خاصیت) $7x - 10 + 10 < x + 8 + 10$

(تنسیخی خاصیت بہ لحاظ جمع) $7x - x < x + 18 - x$

$7x - x < + 18$

$6x < 18$

(تنسیخی خاصیت بہ لحاظ ضرب) $6x/6 < 18/8$

$x < 3x$

جس کا مطلب ہے $7x - 10 < x + 8$ ان سب کے لیے صحیح ہے جن کی قدر 'x' ہے جو کہ فطری اعداد ہیں اور 3 سے چھوٹے ہیں۔ یہ 1, 2 ہیں۔ لہٰذا حل سیٹ $\{1, 2\}$ ہے۔

چونکہ حقیقی اعداد کا سیٹ جدولی طریقے سے پیش نہیں کیا جا سکتا اس لیے اسے 'سیٹ بنانے والی علامات' کی شکل میں پیش کیا جاتا ہے۔

اگر $a + c < b + c$ تو $a < b$
اگر $c + a < c + b$ تو $a < b$

6- تنسیخی خاصیت بہ لحاظ ضرب

اگر $c > 0$

اگر $ac > bc$ تو $a > b$
اگر $ca > cb$ تو $a > b$
اگر $ac < bc$ تو $a < b$
اگر $ca < cb$ تو $a < b$

اگر $c < 0$

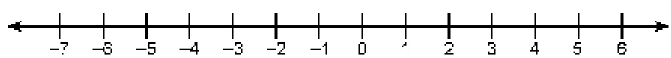
اگر $ac > bc$ تو $a < b$
اگر $ca > cb$ تو $a < b$
اگر $ac < bc$ تو $a > b$
اگر $ca < cb$ تو $a > b$

$a = 1$, $b = 2$ اور $c = 3$ کی قدریں لگا کر تصدیق کریں۔

درج بالا مساواتوں میں خواص ثابت ہوتے ہیں۔ طلبا کو یہ سیکھنے کی ضرورت نہیں ہے مگر جب آپ مساوات اور عدم مساوات کے خواص کی طرف جاتے ہیں تو ضرورت پڑنے پر ان کا حوالہ دیا جا سکتا ہے۔

عدم مساوات

عددی خط کو دیکھیے۔



ایک عددی خط حقیقی اعداد کے درمیان تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال: 4 – 2 سے چھوٹا ہے 2 سے

4 بڑا ہے 1 سے

جملہ: $2 > x > -3$ کا مطلب ہے x ایسے عدد کی نشان دہی کرتا ہے جو ‎-3 اور 2 کے درمیان موجود ہے۔ ہم اس جملے کو اس طرح پڑھ سکتے ہیں۔

x، ‎-3 سے بڑا ہے لیکن 2 سے چھوٹا ہے۔

یہی تقابل جملہ $-3 < x < 2$ میں بیان کیا گیا ہے۔

یہ تین عدم مساوات ہیں

$y + 7 < 9$
سمتیں

$4x - 3 > 2$
سمتیں

$-2 < 0$
سمتیں

حقیقی اعداد کی برابری کے خواص

ہم '=' کا نشان یہ ظاہر کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں کہ دو اظہاریے یکساں اعداد رکھتے ہیں۔ اپنے کام کے دوران ہم مندرجہ ذیل مساویانہ خاصیتوں کو درج کیے بغیر استعمال کریں گے۔

تمام حقیقی اعداد a, b اور c کے لیے

-1	عکسی خاصیت	$a = a$
-2	تشاکلی خاصیت	اگر $a = b$ تو $b = a$
-3	خاصیت مبادلہ	اگر $a = b$ اور $b = c$ تو $a = c$
-4	جمعی خاصیت	اگر $a = b$ تو پھر $b + c = a + c$
-5	ضربی خاصیت	اگر $a = b$ تو پھر $ac = bc$ اور $ca = cb$
-6	تنسیخی خاصیت بہ لحاظ جمع	اگر $a + c = b + c$ تو $a = b$ اور اگر $c + a = c + b$ تو $a = b$
-7	تنسیخی خاصیت بہ لحاظ ضرب	$ac = bc$ تو $a = b$ اور $ca = cb$ تو $a = b$

غیر مساویانہ خصوصیات

تمام حقیقی اعداد a, b اور c کے لیے

-1 ثلاثی خاصیت

یا تو $a < b$ یا $a = b$ یا $a < b$

-2 خاصیت مبادلہ

اگر $a > b$ اور $b > c$ تو $a > c$

اگر $a < b$ اور $b < c$ تو $a < c$

-3 جمعی خاصیت

اگر $a > b$ تو $a + c > b + c$

اگر $a < b$ تو $a + c < b + c$ اور $c + a < c + b$

-4 ضربی خاصیت

اگر $c > 0$ اور $a > b$ تو $ac > bc$ اور $ca > cb$

اگر $a < b$ تو $ac < bc$ اور $ca < cb$

اگر $c < 0$ یعنی c ایک منفی صحیح عدد ہے اور اگر $a > b$ تو پھر $ac < bc$ اور $ca < cb$

اگر $a < b$ تو $ac > bc$ اور $ca > cb$

-5 تنسیخی خاصیت بہ لحاظ جمع

اگر $a + c > b + c$ تو $a > b$

اگر $c + a > c + b$ تو $a > b$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1.4375 \\
\hline
16 & 23.0000 \\
 & -16 \\
\hline
 & 70 \\
 & -64 \\
\hline
 & 60 \\
 & -48 \\
\hline
 & 120 \\
 & -112 \\
\hline
 & 80 \\
 & 80 \\
\hline
 & \text{x}
\end{array}
$$

بہت سے ناطق اعداد کے لیے تقسیم کا طریقہ کار بقیہ صفر کی طرف نہیں لے جاتا۔

مثال : $\frac{103}{33} = 3.1212 .....,$

یہاں نقطوں کا استعمال ظاہر کرتا ہے کہ 12 کے عدد کو لاتعداد مرتبہ دہرایا گیا ہے۔ ہم عام طور پر کہہ سکتے ہیں :

ہر ناطق عدد کو یا تو ایک اختتامی اعشاری عدد یا ایک مکرر اعشاری عدد کے ذریعے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

غیر ناطق اعداد

اس اعشاری اظہاریے پر ایک نظر ڈالیں۔

0.535533555333

اعشاری نقطے کے بعد پہلے اعداد ایک 5 اور ایک 3 ہیں ، اس کے بعد دو 5 اور دو 3 ہیں۔ یہ نہ تو اختتامی ہیں اور نہ ہی مکرر۔ اس طرح ہم یہ جان گئے کہ یہ ناطق عدد کا اظہار نہیں کر رہے ہیں۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد وہ ہیں جن کا اظہار غیر اختتامی اور غیر مکرر عدد سے ہوتا ہے۔

مثال : $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ وغیرہ غیر ناطق اعداد ہیں۔

شمار ہونے والے اعداد کے مثبت جذر جو کہ مکمل مربع نہیں ہیں غیر ناطق اعداد ہیں۔

ناطق اعداد (Rational Numbers)

قدرتی اعداد، شمار ہونے والے اعداد ہیں (یا مثبت صحیح اعداد) جب ہم دو قدرتی اعداد کو جمع کرتے ہیں تو حاصل ہمیشہ ایک قدرتی عدد ہوتا ہے۔

مثال: $2 + 3 = 5$

جبکہ قدرتی عدد کو دوسرے قدرتی عدد سے گھٹایا جائے تو ممکن ہے کہ فرق قدرتی عدد نہ ہو۔

مثال: $2-4 = -2, 5 - 5 = 0$

اس طرح مکمل اعداد اور منفی صحیح اعداد کا تصور واضح ہوتا ہے۔

$0, -1, -2, -3, \ldots$ مگر اس وقت کیا ہوگا جب ایک قدرتی عدد کو دوسرے قدرتی عدد سے تقسیم کیا جائے۔

$$4 \div 2 = 2$$

$$3 \div 5 = 3/5$$

اعداد کا وہ کون سا طریقہ ہے جس میں ہم 3/5 کو رکھ سکتے ہیں۔

کسور عام کے دیے ہوئے اعداد، سیٹ کے اعداد کا حصہ ہیں جو 'ناطق اعداد' کہلاتے ہیں۔

لہٰذا 1/2، 7/6، 5، 3/5 اور 0 ناطق اعداد ہیں۔

ناطق اعداد کے سیٹ کا ذیلی سیٹ مکمل اعداد کا سیٹ ہوتا ہے۔ اس طرح ہم نے سیٹ کے اعداد کو بڑھا دیا تاکہ اسے استعمال کر سکیں۔

ہم ایک ناطق عدد کو اس طرح واضح کر سکتے ہیں۔ ''کوئی بھی عدد جسے p/q کی شکل میں ظاہر کیا جا سکے اس میں p اور q صحیح اعداد اور q، صفر کے برابر نہیں ہے۔''

اس طرح مثبت صحیح اعداد، منفی صحیح اعداد، صفر اور کسور عام، ناطق اعداد کے نظام سے متعلق ہیں۔

جب ہمیں ایک کسر، ناطق عدد کو ظاہر کرنے کے لیے دی جاتی ہے تو ہم کسر کے شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کر کے اس عدد کا اعشاری عدد حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال: $1/2 = 0.5, 3/5 = 0.75, 12/5 = 2.4$

تاہم کبھی کبھی تقسیم کا یہ طریقہ کار ایک طویل تقسیم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال: $23/16 = 1.4375$

سیٹ (Sets)

پاور سیٹ

پاور سیٹ وہ سیٹ ہے جو کسی دیے گئے سیٹ کے تمام ممکنہ ذیلی سیٹوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

مندرجہ ذیل سیٹ پر غور کریں :

$A = \{1, 2, 3\}$

A کا پاور سیٹ اس طرح لکھا جاتا ہے :

$P(A) = A$ کے تمام ممکنہ ذیلی سیٹ

$= [\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\ \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}]$

A کے پاور سیٹ کے 8 ذیلی سیٹ ہیں۔

کسی دیے گئے سیٹ کے پاور سیٹ (ذیلی سیٹوں کی تعداد) معلوم کرنے کے لیے ہم یہ فارمولا استعمال کر سکتے ہیں۔

2^n (اس میں n سیٹ کے اجزا ظاہر کرتا ہے)

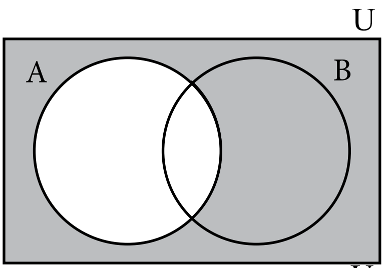
مثال : $\{1, 2, 3\} =$ (3 اجزا)

$P(A) = 2^n = 2^3 =$ 8 ذیلی سیٹ

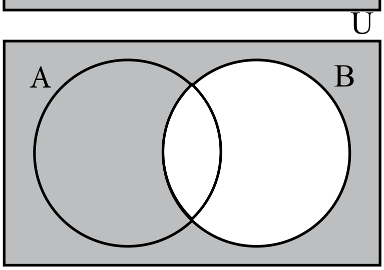
$B = \{a, b, c, d\} =$ (4 اجزا)

$P(B) = 2^n = 2^4 =$ 16 ذیلی سیٹ

ڈی مورگن کے قوانین : (Venn diagram)

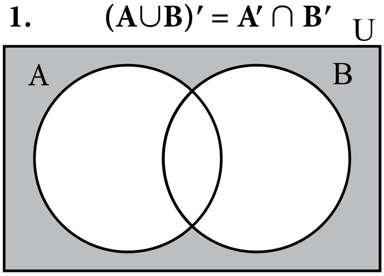


A'

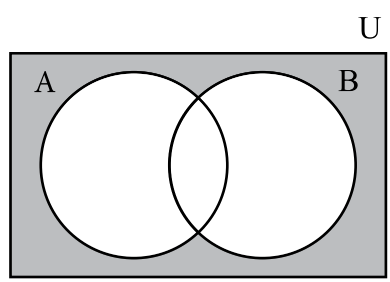


B'

1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

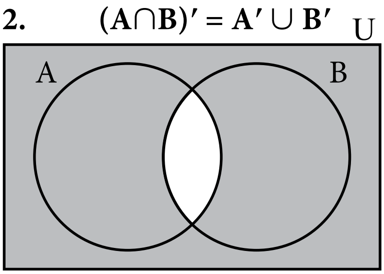


$(A \cup B)'$

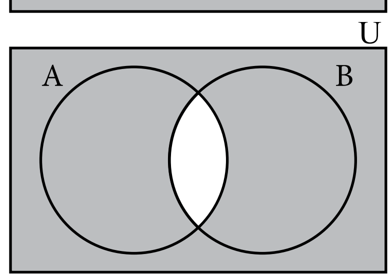


$A' \cap B'$

2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$



$(A \cap B)'$



$A' \cup B'$

Notes

Notes