Unit 1

Sets

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Describe sets using language (tabular, descriptive, and set-builder notation) and Venn diagrams
- Find the power set (P) of set A where A has up to four elements

Stimulus: Begin the lesson by reviewing with the students that sets are a well-defined collection of objects and the multiple methods of describing a set. Recall basic set notation such as curly brackets, element, not an element, and empty set. Students so far have learnt basic methods of describing sets, that is, descriptive and tabular form. Descriptive method of describes set using words, such as Set A is a set of vowels in the English alphabets, whereas tabular method describes a set by listing the members of the set within curly brackets, that is A = {a, e, i, o, u}. Introduce them to set builder method/notation of describing a set. This method specifies the properties that all the elements of the set satisfy. For example, the $B = \{x \mid x \in N \leq 10\}$ is read as B is a set of all elements of x such that x belongs to natural numbers less than or equals to 10. Once the students revise how to use the set language and notation, it will be easier to explain the relationship between the two sets using Venn diagrams.

Move on to recalling with them what subsets are. Explain to them that a set whose members are also part of another set is a subset. For example, if A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} and B = {2, 3, 4, 5, 6, then B is a subset of A and A is the superset of B. Set B is a proper subset of A as set A has elements that are not part of B. An improper subset, however, has all the same elements as its super set. If Set C = {a, b, c, d} and Set D = {c, d, b, a}, then Set C is an improper subset of D. Every set is an improper subset of itself. In a nutshell, tell the students that a proper subset is a set that contains some, but not all, elements of its superset, while an improper subset is a subset that contains all elements of the original set and is also equal to the superset. The concept of proper and improper subset may be confusing for some students; therefore, it is recommended to spend some extra time explaining the difference to them.

Furthermore, move on to recalling with the students the different kinds of sets: finite, infinite, equal, equivalent, disjoint, overlapping, and empty sets.

- Finite sets have a limited number of elements.
- Infinite sets have an unlimited number of elements.
- Equal sets are two sets that have the same elements.
- Equivalent sets are two sets that have the same number of elements even if the members of the sets are different.

باب
۱
سیٹ

قابلیت ۱

- سیٹ کو بیان کرتے ہوئے جدولی (tabular)، بیانیہ (descriptive) اور ترقیم سیٹ ساز (set-builder notation) اور وین ڈائی گرام کا استعمال کرسکیں۔
- set A کا power set معلوم کرسکیں۔ جہاں سیٹ A میں چار تک ارکان (elements) ہوں۔

محرک: طلبہ کے ساتھ مل کر یہ دہراتے ہوئے سبق کا آغاز کیجیے کہ سیٹ ایک اچھی طرح سے بیان کردہ مختلف چیزوں کا مجموعہ ہیں اور کسی سیٹ کو بیان کرنے کے متعدد طریقے ہیں۔ سیٹ کی بنیادی علامتوں (notation) کو دہرائیے۔ جیسے کہ خطوط وحدانی (curly brackets)، اجزا (elements)، اجزا نہیں اور خالی سیٹ (empty set)۔ اب تک طلبہ نے سیٹ کو بیان کرنے کے بنیادی طریقے سیکھے ہیں۔ یعنی بیانیہ (descriptive) اور جدولی (tabular) شکل کے تمام سیٹ کو بیان کرنے کا بیانیہ طریقہ جس میں الفاظ کا استعمال کرتے ہیں جیسے کہ set A میں انگریزی حروف تہجی حروفِ علت (vowels) کا مجموعہ ہے جب کہ جدولی طریقہ کسی سیٹ کے تمام ارکان کو خطوط وحدانی (curly brackets) میں لکھ کر سیٹ کی وضاحت کرتا ہے یعنی $A = \{a, e, i, o, u\}$۔ اب انھیں سیٹ کو ظاہر کرنے کا طریقہ سیٹ بلڈر نوٹیشن سے متعارف کروائیے۔ یہ طریقہ سیٹ میں موجود اجزا کی خصوصیات کی وضاحت کرتا ہے مثال کے طور پر $B = \{x \mid x \in N \leq 10\}$، اس کو یوں پڑھا جاتا ہے کہ سیٹ B کے x ارکان ہیں اور x کا تعلق قدرتی اعداد سے ہے جو 10 سے کم یا اس کے برابر ہے۔ طلبہ جب سیٹ کی زبان اور علامتوں (notation) کو استعمال کرنے کے طریقے کو دہرا لیں گے تو ان کے لیے دو سیٹوں کے درمیان تعلق کو Venn diagrams کے ذریعے سمجھنا آسان ہو جائے گا۔

اب ان کو یاد دلائیے کہ تحتی سیٹ (sub sets) کیا ہیں وضاحت کیجیے کہ ایک سیٹ جس کے تمام ارکان دوسرے سیٹ کا بھی حصہ ہوں اسے تحتی سیٹ (sub sets) کہتے ہیں مثال کے طور پر اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ اور $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ تو B ایک subset ہے A کا اور A سپر سیٹ (super sets) ہے B کا، سیٹ B ایک proper subset ہے A کا۔ کیونکہ set A کے اجزا set B کا حصہ نہیں ہیں۔

اگر $C = \{a, b, c\}$ اور $D = \{c, d, b, a\}$ تب سیٹ C ایک improper subset ہے D کا۔ یہ set خود اپنا improper subset ہوتا ہے مختصراً طلبہ کو بتائیے کہ ایک proper subset ایک ایسا set ہے جس میں اس کے super set کے کچھ عناصر ہوتے ہیں جب کہ ایک improper subset ایک ایسا subset ہے جو اصل سیٹ کے تمام ارکان یا عناصر پر مشتمل ہوتا ہے اور یہ super set کے برابر بھی ہوتا ہے۔

چونکہ proper اور improper subset کا تصور بعض طلبہ کے لیے الجھن کا باعث بھی ہوسکتا ہے لہٰذا اس کا فرق طلبہ کو سمجھانے کے لیے اس پر زیادہ وقت صرف کرنے کی ضرورت ہو گی۔

مزید برآں اب آپ سیٹ کی مختلف اقسام (finite، infinite، equal، equivalents، disjoint، overlapping اور empty set) کو طلبہ کے ساتھ دہراتے ہوئے پڑھائی کو جاری رکھیے۔

- finite set کے عناصر (elements) کی تعداد محدود ہوتی ہے۔
- infinite set کے عناصر (elements) کی تعداد لامحدود ہوتی ہے۔
- equal set وہ دو سیٹ جن میں ایک جیسے عناصر (elements) ہوں۔
- equivalent set ایسے دو سیٹ جن کے عناصر یا ارکان کی تعداد یکساں ہو اگرچہ ان کے ارکان یکسر مختلف ہوں۔

- Disjoint sets are two sets that have no elements in common.
- Null set does not have any element.
- Overlapping sets are two sets that have at least one common element and atleast uncommon member in both sets.

Once the students have revised all the key vocabulary sets, explain to them what a power set is. This concept is related to subsets, so it can be taught together. A set that has all possible subsets is called a power set. A power set includes the empty set and the set itself. It is denoted by P. The cardinality of a power set depends on the number of possible subsets formed from a given set, that is 2^n where n = the number of elements in a set. You may use Example 1 from the textbook to help support your explanation.

Competency 2:

- Describe operations on sets and verify commutative, associative, distributive laws with respect to union and intersection
- Verify De Morgan's laws and represent through Venn diagram

Stimulus: In order to introduce operations on sets, students need to first revise and recall what a universal set is. Once they do, recall with them that union are the collective elements of two or more sets. It is a set that contains elements of all sets. It is denoted by U. For example:

If A = {a, b, c, d, e} and B = {e, f, g, h}, then A U B = {a, b, c, d, e, f, g, h}.

On the contrary, intersection of two or more sets are elements that are common between the two sets. It is denoted by ∩. From the above example, A ∩ B = {e}. In some cases, the intersection of two sets is an empty set. This means that both the sets are disjoint sets. Inform the students that the union and intersection of three sets work the same way as the union and intersection of two sets.

The most appropriate method of teaching students how to prove different properties of sets is by using as many examples as possible. The operation of sets, unlike numbers, is mainly finding the union and intersection of two or more sets. It is always best to solve the operations step-by-step to avoid any kind of mistake or confusion. The first step is to solve the operations within the brackets once they are done, solve the operation outside the bracket. For example, consider A = {1, 2, 3}, B = {2, 4, 6}, and C = {2, 5, 6, 7}, to perform operation A U (B U C), we first solve (B U C) and then A U (B U C) i.e.,

A = {1, 2, 3}
B = {2, 4, 6},
C = {2, 5, 6, 7}
B U C = {2, 4, 6} U {2, 5, 6,7} = {2, 4 5, 6, 7}

- غیرمشترک سیٹ (disjoint sets) ایسے دو سیٹ ہیں جن کا کوئی رکن مشترک (common) نہیں ہوتا۔
- خالی سیٹ (null set) میں کوئی بھی رکن نہیں ہوتا یہ خالی ہوتا ہے۔
- overlappint sets سے مراد وہ دو سیٹ ہیں جن میں کم از کم ایک رکن مشترک (common) ہو اور دونوں سیٹ میں کم از کم ایک رکن غیرمشترک ہونا چاہیے۔

جب طلبہ تمام سیٹ کے متعلقہ کلیدی الفاظ کا اعادہ کر چکیں تو انھیں power سیٹ کے بارے میں بتائیے۔ یہ تصور sub sets سے متعلق ہے لہٰذا دونوں کو ایک ساتھ پڑھایا جا سکتا ہے۔ power set سے مراد ایسا سیٹ ہے جس میں تمام ممکنہ ذیلی یا تحتی سیٹ (sub sets) شامل ہوں۔ ایک پاورسیٹ میں خالی سیٹ (empty set) اور خود یہ سیٹ بھی شامل ہوتا ہے۔ اسے P سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ پاورسیٹ کی تعداد یعنی cardinality اس سے بننے والے ذیلی سیٹوں کی تعداد پر منحصر ہے۔یعنی 2^n جہاں n = ایک سیٹ میں موجود عناصر یا ارکان (elements) کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ اپنی وضاحت کو بہتر بنانے کے لیے کتاب میں دی گئی مثال نمبر 1 کو استعمال کیجیے۔

قابلیت ۲

- سیٹوں پر عوامل (assosiative operations) اور تقسیمی قوانین (distributive laws) کی تصدیق (verify) کر سکیں۔
- ڈی مورگن کے قانون کی تصدیق (verify) کریں اور Venn diagram کے ذریعے نمائندگی کر سکیں۔

محرک: سیٹوں پر عوامل (operations) کو متعارف کروانے سے پہلے ضروری ہے کہ طلبہ کو یونیورسل سیٹ اور یونین سیٹ کا اعادہ کروا دیا جائے۔ یونین سیٹ دو یا زیادہ سیٹوں کے تمام ارکان (collective elements) کا مجموعہ سیٹ ہوتا ہے۔جس میں تمام سیٹوں کے ارکان (elements) شامل ہیں۔ اسے U سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر اگر

If A = {a, b, c, d, e} and B = {e, f, g, h}, then A U B = {a, b, c, d, e, f, g, h}.

اس کے برعکس دو یا زائد سیٹوں کے انٹرسیکشن سے مراد وہ ارکان (elements) ہیں جو دونوں سیٹوں میں مشترک (common) ہوں اسے ∩ کی علامت سے ظاہر کرتے ہیں۔ مذکورہ بالا مثال میں A ∩ B = {e} بعض صورتوں میں دوسیٹوں کا انٹرسیکشن ایک خالی سیٹ ہوتا ہے اس کا مطلب ہے کہ دونوں سیٹ آپس میں غیرمشترک (disjoint sets) ہیں یعنی ان پر کوئی بھی رکن مشترک نہیں ہے۔طلبہ کو بتائیے کہ تین سیٹوں کا انٹرسیکشن اور یونین اسی طرح معلوم کیا جاتا ہے جس طرح کہ دوسیٹوں کا۔

طلبہ کوسیٹوں کی مختلف خصوصیات (properties) کو ثابت کرنا سکھانے کا سب سے موثر طریقہ یہ ہے کہ انھیں زیادہ سے زیادہ مثالوں کی مدد سے سمجھایا جائے۔ اعداد کے برعکس سیٹوں کے عوامل (operations) عموماً دو یا سیٹوں کے یونین اور انٹرسیکشن کو تلاش کرنے پر مشتمل ہوتے ہیں۔ کسی بھی قسم کی غلطی یا الجھن سے بچنے کے لیے بہتر ہو گا کہ یہ ان عوامل operations کو مرحلہ وار (setp-by-step) حل کیا جائے۔ پہلے مرحلے میں بریکٹ کے اندر کے عوامل کو حل کروایئے اس کے بعد کے مرحلے میں بریکٹ کے باہر کے عوامل (operations) کو حل کیجیے۔مثال کے طور پر فرض کریں اگر A = {1, 2, 3}, B = {2, 4, 6}, and C = {2, 5, 6, 7} ہو تو آپریشن A U (B U C) کرنے کے لیے ہم پہلے حل کرتے ہیں (B U C) اور پھر A U (B U C) یعنی

A = {1, 2, 3}B = {2, 4, 6},
C = {2, 5, 6, 7}
B U C = {2, 4, 6} U {2, 5, 6,7} = {2, 4 5, 6, 7}

So, A U (B U C) = {1, 2, 3} U {2, 5, 6, 7} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

Similarly, A ∩ (B ∩ C) is done in the same manner. Point out to the students that the equation asks to find the intersection and not union.

(B ∩ C) = {2, 4, 6} ∩ {2, 5, 6, 7} = {2, 6}
So, A ∩ (B ∩ C) = {1, 2, 3} ∩ {2, 6} = {2}

To help the students attain mastery, you may solve the following equations on board.

- A ∪ (B ∩ C)
  B ∩ C = {2, 4, 6} ∩ {2, 5, 6, 7} = {2, 6}
  A U (B ∩ C) = {1, 2, 3} U {2, 6} = {1, 2, 3, 6}
- A ∩ (B ∪ C)
  B ∪ C = {2, 4, 6} ∪ {2, 5, 6, 7} = {2, 4, 5, 6, 7}
  A ∩ (B ∪ C) = {1, 2, 3} ∩ {2, 4, 5, 6, 7} = {2}
- (A ∪ B) ∪ C
  A U B = {1, 2, 3} U {2, 4, 6} = {1, 2, 3, 4, 6}
  (A U B) U C = {1, 2, 3, 4, 6} U {2, 5, 6, 7} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
- (A ∩ B) ∪ C
  A ∩ B = {1, 2, 3} ∩ {2, 4, 6} = {2}
  (A ∩ B) ∪ C = {2} U {2, 5, 6, 7} = {2, 5, 6, 7}

The above examples can be represented in Venn diagrams. Each set will have a circle of its own, such that all three circles overlap. Sets follow the commutative property of union and intersection. That is the changing the order of sets in union or intersections operations does not change the answer. Similarly, sets also follow the associative property of union and intersection; that is changing the sequence in which the operation is performed does not change the answer. Sets also follow the distributive law of union over intersection, that is A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C) and distributive law of intersection over union, that is A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C).Use the examples from the textbooks to support your explanation.

Move on to explaining to the students how De Morgan's law can be verified using Venn diagrams. Let's consider the following example.

U = {2, 4, 6, 10, 12, 14}
A = {2, 6, 10, 12}
B = {6, 10, 12, 14}

To prove (A U B)' = A' ∩ B', break the equation down to left hand side and the right-hand side. The left-hand side says that the complement of the union set is the intersection of individual complements. From the above example,

لہٰذا $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

بالکل اسی طرح $A \cap (B \cap C)$ کو حل کیا جاتا ہے۔طلبہ کو یہ نکتہ بھی وضاحت سے بتائیے کہ equation یہ کہتی ہے کہ intersection تلاش کریں نہ کہ یونین۔

$(B \cap C) = \{2, 4, 6\} \cap \{2, 5, 6, 7\} = \{2, 6\}$

لہٰذا $A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 6\} = \{2\}$

طلبہ کی مہارت کو بڑھانے کے لیے آپ بورڈ پر درج ذیل equation کو حل کر کے دکھا سکتے ہیں۔

- $A \cup (B \cap C)$
  $B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{2, 5, 6, 7\} = \{2, 6\}$
  $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 6\} = \{1, 2, 3, 6\}$
- $A \cap (B \cup C)$
  $B \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{2, 5, 6, 7\} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$
  $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 5, 6, 7\} = \{2\}$
- $(A \cup B) \cup C$
  $A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
  $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\} \cup \{2, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $(A \cap B) \cup C$
  $A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2\}$
  $(A \cap B) \cup C = \{2\} \cup \{2, 5, 6, 7\} = \{2, 5, 6, 7\}$

مذکورہ بالا مثال کو venn diagrams کی مدد سے بھی دکھایا جا سکتا ہے۔ ہر سیٹ کو ایک دائرے میں لکھا جائے گا جو کہ ایک دوسرے کو overlap کریں گے۔ اور یونین اور انٹرسیکشن کی commutative property کی پیروی کریں گے یعنی یونین اور انٹرسیکشن کے عوامل میں سیٹوں کی ترتیب کے بدلے کا اثر حاصل شدہ جواب پر نہیں ہوتا۔ اسی طرح سیٹ یونین اور انٹرسیکشن تسلسل کی خصوصیت کے عمل (associative property) کی پیروی کرتے ہیں یعنی عوامل کو کسی ترتیب میں کیا جائے اس سے جواب نہیں بدلتا = سیٹ انٹرسیکشن پر یونین کے تقسیمی قانون (distributive law) کا اطلاق ہوتا ہے۔

طلبہ کو یہ بات وضاحت سے سمجھانے کے لیے کہ وین ڈائی گرام (Venn Diagram) کی مدد سے De morgan کے قانون کی تصدیق کیسے کی جاسکتی ہے آیئے درج ذیل مثال پر غور کریں۔

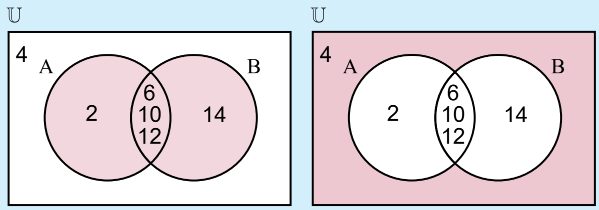
$\mathbf{U} = \{2, 4, 6, 10, 12, 14\}$
$A = \{2, 6, 10, 12\}$
$B = \{6, 10, 12, 14\}$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ $(A \cup B)' = A' \cap B'$، اس equation کو دائیں اور بائیں طرف دو حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ بائیں طرف یہ کہتی ہے یونین سیٹ کا complement، انفرادی complements کے انٹرسیکشن کے برابر ہوتا ہے۔ اوپر کی مثال سے $A \cup B = \{2, 6, 10, 12, 14\}$ and so $(A \cup B)' = \mathbf{U} - (A \cup B) = \{4\}$ بائیں طرف $\{4\}$ ہے

A U B = {2, 6, 10, 12, 14} and so (A U B)' = U – (A U B) = {4}

The left side is {4}.

LHS

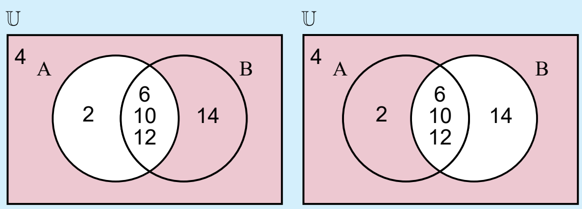


A∪B (A∪B)'

Moving on to the right side:

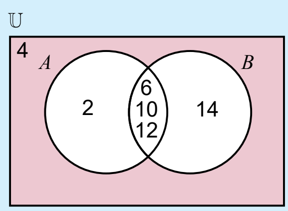
A' = U – A, so {2, 4, 6, 10, 12, 14} – {2, 6, 10, 12} = {4, 14} and
B' = U – B, so {2, 4, 6, 10, 12, 14} – {6, 10, 12, 14} = {2, 4}, so
A' ∩ B' = {4, 14} ∩ {2, 4}
= {4}

RHS



A' B'

Since the left and right hand side are equal, the identity, (A ∪ B)' = A' ∩ B', is proved.

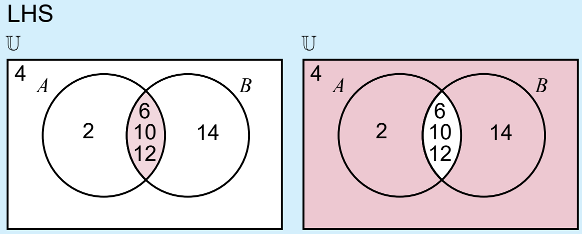


A' ∩ B'

The last identity is (A ∩ B)' = A' ∪ B'. Following the strategy in the previous identity, break the equation down into left and right hand side. From the above example,

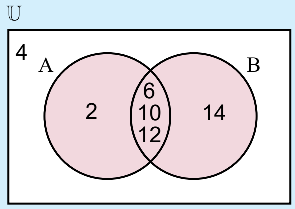
A ∩ B = {6, 10, 12}, so (A ∩ B)' = U - A ∩ B = {2, 4, 14}
The left-hand side = {2, 4, 14}.

LHS

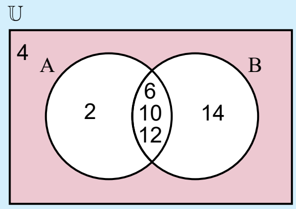


A∪B (A∩B)'

LHS



A∪B

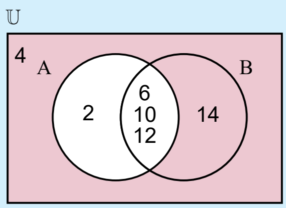


(A∪B)'

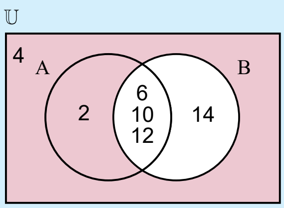
اب دائیں طرف کے حصے کو دیکھیے:

$A' = U - A$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{2, 6, 10, 12\} = \{4, 14\}$ and
$B' = U - B$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{6, 10, 12, 14\} = \{2, 4\}$, so
$A' \cap B' = \{4, 14\} \cap \{2, 4\}$
$= \{4\}$

RHS

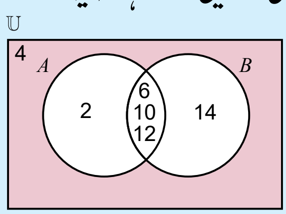


A'



B'

کیونکہ دونوں طرف کا جواب برابر یا ایک جیسا ہے جو اس تصدیق کرتا ہے کہ یہ equation $(A \cup B)' = A' \cap B'$, درست ہے۔

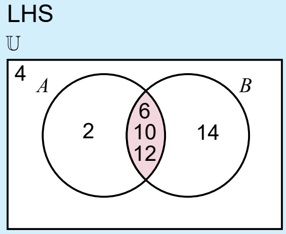


A' ∩ B'

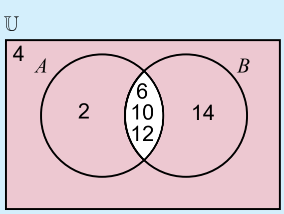
اب last identity is $(A \cap B)' = A' \cup B'$ میں پچھلی identity کی حکمت عملی کی پیروی کرتے ہوئے equation کو دائیں اور بائیں دو حصوں میں توڑ دیں اوپر کی مثال سے

$A \cap B = \{6, 10, 12\}$, so $(A \cap B)' = U - A \cap B = \{2, 4, 14\}$
The left-hand side $= \{2, 4, 14\}$.

LHS



A∪B

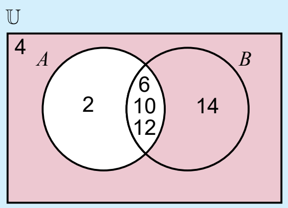


(A∩B)'

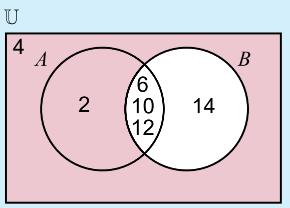
Moving on to the right side:

A' = U – A, so {2, 4, 6, 10, 12, 14} – {2, 6, 10, 12} = {4, 14}
B' = U – B, so {2, 4, 6, 10, 12, 14} – {6, 10, 12, 14} = {2, 4}, so
A' U B' = {4, 14} U {2, 4}
= {2, 4, 14}

RHS

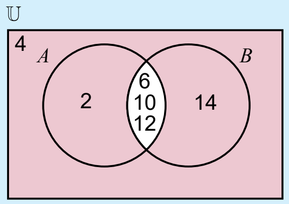


A'



B'

Since the left- and right-hand side are equal, thus the identity, (A ∩ B)' = A' ∪ B', is proved.



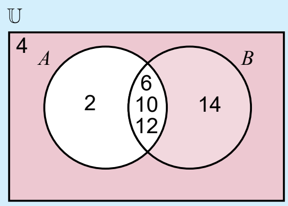
A' ∪ B'

Students often tend to reverse the law or get confused with the symbol; therefore, extra care should be taken when proving the identity. You may use the examples and questions form the book to gain mastery in this competency.

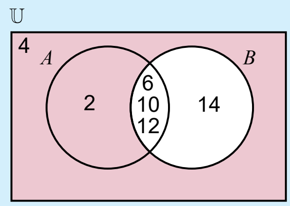
اب دائیں طرف غور کیجیے:

$A' = U - A$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{2, 6, 10, 12\} = \{4, 14\}$
$B' = U - B$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{6, 10, 12, 14\} = \{2, 4\}$, so
$A' U B' = \{4, 14\} U \{2, 4\}$
$= \{2, 4, 14\}$

RHS

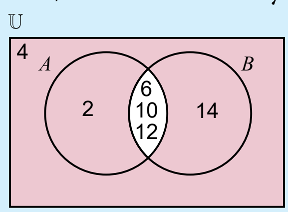


A'



B'

کیونکہ دائیں اور بائیں طرف کے حصے مساوی ہیں لہٰذا یہ identity $(A \cap B)' = A' \cup B'$ کی تصدیق ہے



$A' \cup B'$

طلبہ اکثر اس قانون کو الٹ دیتے ہیں یا علامتوں میں الجھ کر فرق نہیں کر پاتے اس لیے identity کو prove کرتے ہوئے محتاط رہنا چاہیے۔ آپ اس قابلیت میں مہارت پیدا کرنے کے لیے کتاب کی مثالیں اور سوالات کو استعمال کر سکتے ہیں۔

Unit 2

Real Numbers

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Differentiate between rational and irrational numbers.
- Identify and differentiate between decimal numbers as terminating (non-recurring) and non-terminating (recurring).
- Demonstrate the following properties: closure property, associative property, existence of identity element, existence of inverses, commutative property, distributive property, and ordering property

Rationale: Students have prior knowledge of natural numbers, whole numbers, integers, and rational numbers. All these numbers, along with irrational numbers, fall under the umbrella term of real numbers. Real numbers are used in every aspect of life – finances, measurement, architecture, engineering, and programming. They help with problem-solving skills and build computational fluency. To introduce real numbers, start by revising rational numbers, and then introduce irrational numbers before working with real numbers.

Stimulus: For the students to understand what real numbers are, they need to first recall rational numbers and then be introduced to the types of decimal numbers and irrational numbers. Therefore, begin the lesson with rational numbers. Students have prior knowledge of what rational numbers are. Any number (natural numbers, whole numbers and integers) that can be represented in a fractional form (where the denominator is never 0) is a rational number. Rational numbers include decimal numbers as decimals are fractions with the denominator in the power of 10. Decimal numbers are either terminating or non-terminating. Explain to the students that terminating decimal numbers have finite digits after the decimal point; for example, $\frac{3}{4} = 0.75$, $1\frac{1}{4} = 1.25$, etc. However, non-terminating decimal numbers have infinite digits after the decimal point, for example $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$

Non-terminating decimal numbers can either be recurring, where the same digits occur multiple times after the decimal point, or non-recurring, where the digits after the decimal point are all different. Once the students understand what terminating and non-terminating decimal numbers are, introduce them to irrational numbers. Irrational numbers are non-terminating, non-recurring decimal numbers. For example, the numerical value of π, 3.141592654 ..., where the digits after the decimal points are non-terminating and non-recurring. Hence, π is an irrational number. Other examples of irrational numbers are $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, etc.

حقیقی اعداد

قابلیت ۱

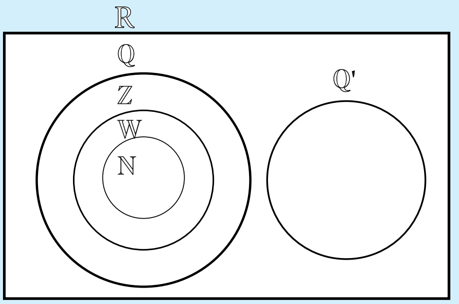
- ناطق (rational) اور غیر ناطق (irrational) اعداد میں فرق کر سکیں۔
- اعشاری اعداد (decimal number) کو terminating (non recurring) اور non-terminating (recurring) کے طور پر شناخت کر سکیں اور ان میں فرق کر سکیں۔
- closure property، assosiative property، existence of identity element، existence of inverses، cummutative property، distributive property اور ordering property کو ظاہر کر سکیں۔

استدلال: طلبہ کو قدرتی اعداد natural، مکمل اعداد (whole numbers)، صحیح اعداد (integers) اور ناطق اعداد (rational numbers) کا پہلے سے علم ہے اور یہ تمام اقسام کے اعداد ایک جامع حقیقی اعداد کی اصطلاح کے تحت آتے ہیں۔ حقیقی اعداد زندگی کے ہر شعبے میں استعمال ہوتے ہیں جیسے مالیات، پیمائش، آرٹ، تعمیر، انجینئرنگ اور پروگرامنگ۔ یہ حقیقی زندگی سے جڑے مسائل کو حل کرنے میں مہارتیں پیدا کرنے میں مدد فراہم کرتے ہیں اور کمپیوٹیشنل روانی پیدا کرتے ہیں۔ طلبہ کو حقیقی اعداد (real number) کے ساتھ کام کرنے سے قبل ناطق نمبروں (rational numbers) کا اعادہ کروایئے پھر انھیں غیر ناطق اعداد سے متعارف کروایئے۔

محرک: طلبہ کو real numbers کو سمجھنے سے پہلے rational numbers کا اعادہ کرنا ہوگا پھر انھیں اعشاری اعداد، غیر ناطق اعداد (irrational numbers) کی اقسام سے متعارف کروایئے۔ اس لیے سبق کی ابتدا rational numbers سے کیجیے طلبہ پہلے ہی سے جانتے ہیں کہ کوئی بھی عدد قدرتی (natural numbers) مکمل اعداد (whole number) اور صحیح اعداد (integers) جسے کسر کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہو جہاں denominator کبھی '0' صفر نہیں ہوتا وہ rational number کہلاتا ہے rational numbers میں اعشاری اعداد بھی شامل ہوتے ہیں کیونکہ اعشاری اعداد وہ کسور ہیں جن کا denominator 10 کی power میں ہوتا ہے۔ اعشاری اعداد یا تو terminating ہوتے ہیں یا non-terminating یہاں یہ بات طلبہ کو بتایئے کہ terminating decimal numbers وہ ہیں جن میں اعشاری نقطے کے بعد ہندسے محدود ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر $1\frac{1}{4} = 1.25$, $\frac{3}{4} = 0.75$ وغیرہ۔ تاہم non-terminating decimal numbers میں اعشاری نقطے کے بعد لامحدود ہندسے ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر $\frac{1}{3} = 0.333...$

non-terminating decimal numbers یا تو recurring یعنی اعشاریہ کے بعد ایک یا ایک سے زیادہ ہندسے (digits) بار بار آتے ہیں۔ یا non-recurring یعنی اعشاریہ کے بعد آنے والے تمام ہندسے (digits) مختلف ہوتے ہیں۔ جب طلبہ ان terminating اور non-terminating decimal کو اچھی طرح سمجھ لیں تو انھیں irrational numbers کے بارے میں بتایئے کہ یہ non-terminating اور non-recurring decimal numbers ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر عدد پائی Pi کی عددی قیمت numerical value کو دیکھیے π، 3.141592654... جہاں اعشاریہ کے بعد آنے والے digits non-terminating اور non-recurring ہیں۔ لہٰذا π ایک irrational numbers ہے۔ $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}$ irrational numbers کی مثالیں ہیں۔

Now, once the students have recalled rational numbers and understood what irrational numbers are, define real numbers as a set of numbers that contain rational numbers and irrational numbers. The set of real numbers is denoted by R. Real numbers can be represented anywhere on the continuous number line.



Q = Rational numbers, Z = Integers, W = Whole numbers, N = Natural numbers, Q' = Irrational numbers.

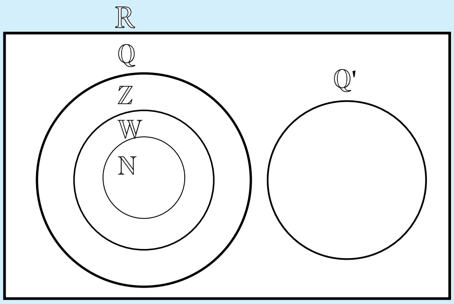
Once the students can easily identify and define what real numbers are, move on to explaining to them the properties that real numbers fulfil. The commutative and associative law applies to real numbers, that is changing the order in which the numbers are added or multiplied and grouping them together does not change the answer. The distributive law of multiplication over addition applies to real numbers as well. Real numbers also have additive = 0 and multiplicative identity = 1, that is when 0 (additive identity) is added to any real number, or when 1 (multiplicative identity) is multiplied with any number, the result retains the original number. Similarly, real numbers have additive and multiplicative inverses, that is when an inverse number is added or multiplied to any real number, the answer is 0 and 1, respectively. There is another property that students have yet to know that applies to real numbers – the closure property. Real numbers are closed under addition, multiplication and subtraction. The term 'closed' means that when an operation (such as +, ×, ÷ or –) is applied to the members of a set (real numbers) the answer is always the member of the same set (real number). This means that when any two real numbers are added, multiplied or subtracted, it always results in a real number. The last property that students need to know is the ordering property of real numbers. There are six conditions of ordering property that you may use from the textbook to explain to the students.

Similar to the absolute value of integers and rational numbers, the absolute value of real numbers is the distance from 0 in either of the directions on the number line.

Competency 2:

- Round off numbers up to 5 significant figures
- Analyse approximation error when numbers are rounded off

Stimulus: Begin the lesson by explaining to the students how approximation and estimation are used in our daily lives. We use it when cooking, measuring, or creating timelines for our daily tasks. Students are familiar with rounding off. Inform them that rounding off is a method of estimation. Rounding off is done to the nearest whole number, decimal number and significant figures.



جب طلبہ ناطق اعداد (rational number) کو ایک بار دہرالیں اور غیر ناطق اعداد (irrational numbers) سے اچھی طرح واقف ہو جائیں تو انھیں حقیقی اعداد (real number) کو بہ طور اعداد کے ایسے سیٹ کے طور پر بیان کیجیے جس میں ناطق اور غیر ناطق دونوں طرح کے اعداد شامل ہوں۔ حقیقی اعداد کے ایسے سیٹ کو R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ حقیقی نمبروں کو مسلسل عددی لائن پر کہیں بھی دکھایا جا سکتا ہے۔

Q = rational numbers ،Z = integers ،W = whole،

N = Natural numbers ،Q' = rational numbers

طلبہ جب حقیقی اعداد (real numbers) کو بہ آسانی شناخت کرنے اور ان کو وضاحت سے بیان کرنے کے قابل ہو جائیں تو انھیں ان کی خصوصیات کے بارے میں بتائیے۔ جو حقیقی اعداد پر لاگو ہوتی ہیں یعنی commutative اور assosiative قوانین جو حقیقی اعداد پر لاگو ہوتے ہیں یعنی اگر ہم اعداد کو ضرب یا جمع کرتے ہوئے ان کی ترتیب کو بدل دیں تو جواب پر کوئی اثر نہیں پڑتا یا انھیں مختلف انداز میں گروپ کریں تب بھی جواب نہیں بدلتا علاوہ ازیں حقیقی اعداد پر جمع پر ضرب کا تقسیم پذیری کا قانون (distributive law of multiplication over addition) لاگو ہوتا ہے۔ حقیقی اعداد میں additive identity = 0 اور multiplicative identity = 1 بھی ہوتی ہے یعنی جب کسی حقیقی عدد میں صفر '0' کو جمع یا تفریق کیا جائے تو اصل عدد برقرار رہتا ہے اسی طرح (1) سے ضرب یا تقسیم دینے پر بھی حقیقی عدد میں تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ اسی طرح real number میں additive اور multiplicative inverses یعنی جب کسی معکوس عدد (inverse number) کو کسی حقیقی عدد میں جمع یا ضرب کریں تو جواب ہمیشہ بالترتیب '0' اور 1 ہی ہو گا۔ حقیقی اعداد پر لاگو ہونے والی ایک اور خاصیت closure property ہے جس سے طلبہ اب تک ناواقف ہیں۔ حقیقی اعداد (real numbers) جمع، ضرب، تفریق اور تقسیم کے تحت اصولوں کے پابند (closed) ہیں اس اصطلاح کا مطلب یہ ہے کہ جب کوئی عمل (جیسے +، ×، ÷ یا –) کسی مجموعے (set) جیسے (real numbers) کے ارکان پر لاگو کیا جاتا ہے تو جواب میں ہمیشہ اسی set کا رکن یا ممبر حاصل ہوتا ہے یعنی حقیقی عدد آسان الفاظ میں ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ جب بھی دو حقیقی اعداد (real numbers) کو جمع، ضرب، تفریق اور تقسیم کیا جائے تو اس کا نتیجہ ہمیشہ ایک حقیقی عدد میں آتا ہے۔ حقیقی اعداد کی آخری خاصیت (ordering property) ہے اس کی کل چھ شرائط (condition) ہیں طلبہ کو یہ خاصیت آپ درسی کتاب کی مدد سے بھی سمجھا سکتے ہیں۔

صحیح اعداد (integers) اور ناطق اعداد (rational numbers) کی طرح حقیقی اعداد (real numbers) کی بھی مطلق قدر (absolute value) ہوتی ہے۔ کسی حقیقی عدد کی مطلق قدر (absolute value) عددی خط (number line) پر صفر '0' سے اس کی دوری (distance) کو ظاہر کرتی ہے خواہ وہ دائیں طرف ہو یا بائیں طرف۔

قابلیت ۲

- اعداد کو زیادہ سے زیادہ 5 اہم ہندسوں (significants figures) تک round off کر سکیں۔
- جب اعداد کو round off کیا جائے تو تخمینی غلطی کا تجزیہ کر سکیں۔

محرک: سبق کا آغاز طلبہ کو یہ سمجھاتے ہوئے کیجیے کہ تخمینہ (approximation) اور اندازہ (estimation) ہماری روزمرہ زندگی میں کیسے استعمال ہوتے ہیں۔ ہم اپنی روزمرہ زندگی میں اسے کھانا پکانے، پیمائش کرنے یا اپنے روزانہ کے کاموں کے لیے وقت کا تعین کرنے میں استعمال کرتے ہیں۔ طلبہ round off سے بہ خوبی واقف ہیں۔ انھیں بتائیے کہ یہ اندازہ لگانے کا ایک طریقہ ہے جو قریبی مکمل عدد (whole numbers) اعشاری عدد (decimal number) اور اہم ہندسوں (significant figures) تک کیا جاتا ہے۔

Rounding off to whole numbers and decimals can be done either using the number line or other methods. Recall both the strategies and students may choose to use either strategy according to their ease. However, at this level, students mostly tend not to use the number line as it takes time. So, recall with them that when rounding off a number, consider the digit immediately to the right of the rounding place. For example, in case of whole NUMBERS, if a number is to be rounded off to the nearest thousands, hundreds is considered, and if the rounding place is hundreds, tens is considered. If the digit on the right of the rounding place is 5 or more than 5, the number digit is rounded up (that is increased) and if the digit is less than 5, the number is rounded down. For example, 75,765 rounded off to the nearest thousands is 76000, and rounded off to the nearest hundred is 76,800. The strategy works the same for decimals, positive and negative integers, and rational numbers, except for fractions which are first converted into decimals. The rounding place of decimals are tenths, hundredths, and thousandths. For example, 56.454 rounded off to the nearest tenth is 56.5 and to the nearest hundredth would be 56.45. Rounding off to the nearest tenth, hundredth and thousandth is the same as rounding off to 1 decimal place, 2 decimal place and 3 decimal places, respectively.

Use examples and exercises from the book to help students master rounding off to nearest whole numbers and decimal places. Once the students can accurately do so, move on to explaining rounding off significant figures to them. This concept is fairly new for the students, so students must first know what significant figures are. Significant figures, as the name suggests, tell us the accurate or reliable digits in a number. These figures convey the meaning of a number according to the accuracy. For example, 6.543 has four significant numbers. Explain that there are rules to determine which numbers are significant. Use the rules from the textbook with examples to support your explanation.

Move on to explaining rounding off to significant numbers. When rounding off to certain significant figures, if the next significant digit is 5 or greater than 5, the number is rounded up but if the digit is less than 5 the number is rounded down, and the rest of the digits will be replaced by 0. For example, the number 54345 has 5 significant figures. If the question requires students to round off to the 3 significant figures, they must look at the 4^{th} significant digit from the left, i.e., 4. So the number will be kept as it is, i.e. 54300. In case of decimals, zero after significant digits are retained so that precision of the rounded number is retained. For example, 3.147 has four significant digits. If the question required to round it off to 2 significant digits, we look at the 3^{rd} significant digit, i.e., 4. So, the number is rounded down to 3.140 to show that the number is precise to the thousandth place, even though the value does not change mathematically.

مکمل اعداد (whole numbers) اور اعشاری اعداد پر round off کرنا، اس عمل کے لیے numberbia یا کسی اور طریقے کو بھی استعمال کیا جاسکتا ہے۔ طلبہ کو دونوں حکمت عملیاں یاد دلائیے تاکہ وہ اپنی سہولت کے مطابق کسی ایک کو چن سکیں۔ تاہم اس جماعت کے طلبہ اکثر number line یعنی عددی خط کا استعمال نہیں کرتے کیونکہ اس میں وقت لگتا ہے۔ لہٰذا طلبہ کو یاد دلائیے کہ جب کسی عدد کو round off کیا جاتا ہے تو راؤنڈ آف کرنے کی جگہ کے عین دائیں طرف کے ہندسے کو مدنظر رکھا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر مکمل اعداد (whole number) کی صورت میں، اگر کسی عدد کو قریبی ہزار (nearest 1000) round off کرنا ہو تو سیکڑوں (hundreds) کے ہندسے کو دیکھا جاتا ہے اور اگر round off کرنے کی جگہ سیکڑوں (nearest 100) تک ہو دسیوں (tends) کے ہندسے کو دیکھا جاتا ہے اور اگر round off کرنے کی جگہ کے دائیں طرف موجود ہندسہ (digits) 5 یا 5 سے زیادہ ہو تو عدد کو اوپر کی طرف یعنی بڑھا کر round off کیا جاتا ہے اور اگر ہندسہ (digit) 5 سے کم ہو تو عدد کو نیچے کی طرف یعنی کم کرکے round off کر دیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر 75.765 کو قریبی ہزار تک round off کرنے پر 76.800 حاصل ہوتا ہے۔ یہی حکمت عملی اعشاری اعداد، مثبت اور منفی صحیح اعداد (integers) اور ناطق اعداد (rational numbers) پر بھی لاگو ہوتی ہے سوائے کسور (fractions) کے جنھیں پہلے اعشاری اعداد میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ اعشاریہ والی عددی مقداروں کی rounding places ہیں دسویں (tenths) سوویں (hundreds) اور ہزارویں (thousands)۔ مثال کے طور پر 56.454 کو قریبی دسویں تک round off کرنے پر 56.5 حاصل ہوتا ہے اور قریبی سوویں تک round off کرنے 56.45 حاصل ہوتا ہے قریبی دسویں (tenth) سوویں (hundredth) اور ہزارویں (thousandth) تک round off کرنا انھیں بالترتیب 1، 2 اور 3 اعشاری جگہوں (decimal places) تک گول کرنے کے مترادف ہے۔

درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو استعمال کیجیے تاکہ طلبہ قریبی مکمل اعداد (whole number) اور اعشاری مقام (decimal places) تک round off کرنے پر عبور حاصل کرسکیں۔ جب طلبہ اس کام کو درست طریقے سے کرنے لگیں تو انھیں اہم اعداد (significant figures) کے بارے میں بتائیے۔ کیونکہ یہ تصور طلبہ کے لیے بالکل نیا ہے لہٰذا سب سے پہلے آپ یہ بتائیے کہ significant figures کسے کہتے ہیں جیسا کہ نام سے ظاہر ہے کہ یہ کسی عدد میں پہلے سے موجود وہ ہندسے digits ہیں جو accurate یا reliable ہوتے ہیں یہ significant figures کسی عدد کی درستی کے مطابق اس کا مطلب واضح کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر 6.543 میں چار اہم اعداد significant numbers ہیں یہاں یہ بات بھی طلبہ کو سمجھائیے کہ کون سے ہندسے اہم ہیں یہ طے کرنے کے کچھ قاعدے (rules) ہیں۔ اس نکتے کو وضاحت سے بیان کرنے کے لیے درسی کتاب اور مثالوں کو استعمال کیجیے۔

اب آپ طلبہ کو significant figures تک round off کرنے کا طریقہ سمجھائیے جب کسی مخصوص تعداد تک significant figures کو round off کیا جاتا ہے تو یہ غور کیا جاتا ہے کہ اگر اگلا اہم ہندسہ 5 یا اس سے زیادہ ہو تو عدد کو اوپر کی طرف یعنی بڑھا کر round off کیا جاتا ہے۔ اور اگر وہ اہم ہندسہ 5 سے کم ہو تو اسے نیچے کی طرف یعنی کم کرکے round off کیا جاتا ہے اور بقیہ تمام ہندسے 0 سے بدل دیے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر عدد 54345 میں 5 اہم ہندسے ہیں اور اگر سوال میں طلبہ سے 5 اہم ہندسوں تک round off کرنے کے لیے کہا جائے تو انھیں چاہیے کہ بائیں طرف سے چوتھے significant digit کو دیکھیں یعنی 4 جو کہ 5 سے کم ہے لہٰذا عدد کو نیچے کی طرف round off کیا جائے گا اور نتیجے میں حاصل ہو گا 54300۔ اعشاریہ (decimals) کی صورت میں significant digits کے بعد آنے والے صفر برقرار رکھے جائیں گے تاکہ عدد کی درستی برقرار رہے۔ مثال کے طور پر عدد 3.147 کو دیکھیے اس میں 4 اہم ہندسے ہیں اور اگر سوال میں 1 سے 2 significant digits تک round off کرنے کے لیے کہا جائے تو ہم تیسرے اہم ہندسہ کو دیکھیں گے یعنی 4 کو، لہٰذا عدد کو نیچے کی طرف round off کرنا ہو گا یوں ہمیں حاصل ہو گا 3.140۔ یہاں صفر کو اس لیے رکھا گیا ہے تاکہ ظاہر کیا جاسکے کہ یہ عدد ہزارویں (thousands) مقام تک درست ہے حتیٰ کہ عدد کی ریاضیاتی قدر (value) میں بھی کوئی تبدیلی نہیں ہوئی۔

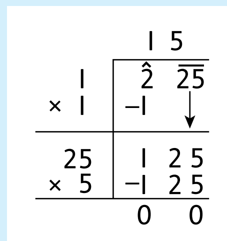
Once the students can successfully round off numbers, they can proceed to learning about approximation errors. Approximation is done when the results are uncertain. A value can be approximated by estimation, rounding off, decimal places or significant figures. Since the approximate value is not the exact value, the possible difference between the exact and approximated value is the approximation error.

Explain to the students that approximation error is measurable only when the exact value is known. The error can then be calculated by subtracting the approximated value from the actual value. With reference to the example in the book, we find the area of three values, 9.5 cm, 10 cm, and 10.5 cm. Once the area is calculated, the approximated values are subtracted from the actual value and the maximum possible approximation error is calculated.

Competency 3:

- Find the square root of natural numbers, common fractions and decimal numbers

Stimulus: In the previous grades, students worked with square numbers and found square roots. Begin the lesson by recalling with the students what square numbers are. The square of a number is obtained when a number multiplies by itself. For example, if 3 is multiplied by 3, the product is 9. It can therefore be said that the square of 3 is 9 or $3^2 = 9$. A perfect square is defined as the product of two integers of equal value. For example, 64 is a perfect square because it is a square of +8 and −8, that is $8 \times 8 = 64$, and $(-8) \times (-8) = 64$. The numbers 1, 4, 9, 16, …, 100 are all perfect squares.



Next, recall with them that the square root of a number is finding the number that is multiplied by itself to result in a square number. For example, if $(2)^2 = 4$, the square root of 4 is 2. The square root symbol is $\sqrt{\ }$ called the radical.

Students have already learnt and used the prime factorisation method to find the square root of perfect squares. They know that the prime factors of numbers that are perfect squares occur in pair and so the square root of each number has one number from each pair. The students will now use the long division method to find square roots of numbers. This method is a little tricky and so requires ample practice to attain fluency.

To find the square root of 225, the digits are paired starting from the right (unit place). These pairs are called periods. The pairs of 225 are 2 and 25. The first digit from the left is 2. So, we find the largest square less than 2, which is $1^2 = 1$. So, 1 is the first digit of the square root. 1 is thus the dividend as well as the quotient. Multiply 1×1 and write it below 2 as well. After subtraction, the remainder is 1. Next, bring down the pair 25 to make it 125. Now, the unit digit of the divisor is obtained by the trial-and-error method. Assuming the unit digit is 5, the divisor will be 25. Therefore, $25 \times 5 = 125$. Write 5 in quotient place. Thus, the square root of 225 is 15.

جب طلبہ اعداد کو اچھے طریقے سے round off کرنے لگیں تو تدریسی عمل کو آگے بڑھاتے ہوئے انھیں تخمینی غلطی (approximation error) کے بارے میں بتایئے۔ تخمینہ اس وقت لگایا جاتا ہے جب نتائج غیر یقینی ہوں ۔ کسی value کو ہم اندازے، round off کرنے، decimal places یا significant figures کے ذریعے تخمینی قدر کے طور پر دکھا سکتے ہیں کیونکہ تخمینی قدر (approximate value) درحقیقت اصل قدر (exact value) نہیں ہوتی اس لیے ان دونوں قدروں (values) کے درمیان ممکنہ فرق کو تخمینی غلطی کہا جاتا ہے۔

طلبہ کو سمجھایئے کہ تخمینی غلطی صرف اسی وقت قابل پیائش ہے جب ہمیں اصل قدر معلوم ہو اس کے بعد ہم اصل قدر میں سے تخمینی قدر کو منہا کر کے تخمینی غلطی کا حساب لگا سکتے ہیں۔ درسی کتاب میں دی گئی مثال کے حوالے سے ہم تین قدروں (0.95 سینٹی میٹر، 10 سینٹی میٹر اور 10.5 سینٹی میٹر) کا رقبہ (area) معلوم کر سکتے ہیں جب رقبہ معلوم ہو جائے تو تخمینی قدروں کو اصل value سے منہا کر دیا جائے تو maximum possible value error کا حساب لگایا جا سکتا ہے۔

قابلیت ۳

- قدرتی اعداد (natural numbers) عام کسور (common fractions) اور اعشاری اعداد (decimal numbers) کا جذرالمربع (square root) معلوم کر سکیں۔

محرک: پچھلی جماعتوں میں طلبہ نے مربع اعداد (square numbers) کے بارے میں پڑھا ہے اور ان کے جذرالمربع بھی معلوم کیے ہیں۔ سبق کا آغاز مربع اعداد کیا ہوتے ہیں کے اعادے سے کروایئے۔ کسی عدد کا مربع حاصل کرنے کے لیے اس عدد کو خود اسی سے ضرب دی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر 3 کو 3 سے ضرب دی جائے تو حاصل ضرب (product) 9 ہوتا ہے اس لیے یہ کہا جا سکتا ہے کہ 3 کا مربع 9 ہے یعنی $3^2 = 9$ ایک کامل مربع (perfect squares) اس حاصل ضرب کو کہتے ہیں جو دو برابر یا مساوی قیمت والے صحیح اعداد (integers) کو ضرب دینے سے حاصل ہو مثال کے طور پر 64 ایک مکمل مربع ہے کیونکہ +8 اور −8 کا square ہے یعنی $8 \times 8 = 64$ اور $(-8) \times (-8) = 64$ اسی طرح اعداد 1، 4، 9، 16، … 100 سب کامل یا مکمل مربع (perfect square) ہیں۔

	1 5
1	$\overline{2}\ \overline{25}$
× 1	−1 ↓
25	1 25
× 5	−1 25
	0 0

پھر طلبہ کو یہ نکتہ ذہن نشین کروایئے کہ کسی عدد کا جذرالمربع تلاش کرنے مطلب یہ ہے کہ اس عدد کو معلوم کیا جائے جسے خود اسی سے ضرب دینے پر مربع عدد حاصل ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $(2)^2 = 4$ ہو تو 4 کا جذرالمربع 2 ہو گا۔ square کی علامت $\sqrt{\ }$ کو radical کہتے ہیں۔

طلبہ پہلے ہی مکمل مربع اعداد کا جذرالمربع معلوم کرنے کے لیے (prime factorization method) سیکھ چکے ہیں۔ وہ جانتے ہیں کہ کامل مربع اعداد کے prime factors جوڑوں (pairs) کی شکل میں ہوتے ہیں لہٰذا ہر عدد کے جذرالمربع میں ہر جوڑے سے ایک عدد ہوتا ہے۔ طلبہ اب طویل تقسیم کا طریقہ استعمال کر کے عدد کے جذرالمربع معلوم کریں گے یہ طریقہ تھوڑا مشکل ہے اس لیے روانی حاصل کرنے کے لیے کافی مشق کی ضرورت ہے۔

225 کا جذرالمربع معلوم کرنے کے لیے پہلے ہندسوں کو دائیں طرف (اکائی کے مقام) سے جوڑوں (pairs) میں تقسیم کریں گے۔ ان جوڑوں کو periods کہا جاتا ہے۔ 225 کے pairs ہیں 2 اور 25 اگر بائیں طرف سے دیکھیں تو پہلا ہندسہ 2 ہے اب ہم ایسا سب سے بڑا مربع تلاش کرتے ہیں جو 2 سے چھوٹا ہو جو ہے $1^2 = 1$ لہٰذا 1 جذرالمربع کا پہلا ہندسہ ہے۔ 1 تقسیم کرنے والا (dividend) اور حاصل تقسیم (quotient) بھی ہے اب 1 × 1 کو ضرب دیں اور انھیں جمع کر کے نیچے لکھیں۔ گھٹانے کے بعد، بقیہ (remainder) 1 بچتا ہے۔ اب 25 کے pair کو نیچے لائیں تا کہ اسے 125 بنایا جا سکے۔ اب تقسیم کنندہ (divisor) کو اکائی ہندسہ اندازے اور آزمائش (trial and error) کے طریقے سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ فرض کیجیے کہ اکائی ہندسہ 5 ہے تو divisor ہو گا 25 اس لیے $25 \times 5 = 125$ لہٰذا 5 کو حاصل تقسیم (quotient) کی جگہ پر لکھیں۔ اس طرح 225 کا جذرالمربع ہے 15۔

When bringing down the next pair, students often tend to think that square root is just half of a number or simple division, emphasise to them that square root is actually the inverse of squaring a number and that is finding the number that is multiplied by itself. Students often also do not pair the digits correctly or start pairing them from the left. Point out that since place value increases from right to left, the pair also starts from right to left. Another common mistake that students make is the incorrect estimation of digits – they choose the next digit without checking if the product exceeds the dividend. The best way to fix this mistake is by telling them a simple hack, that is (divisor + digit) × digit ≤ current dividend.

Once the students are clear on how to find the square root using long division method, move on to finding the square root of decimal numbers. The difference between finding the square root of whole numbers compared to decimal numbers is that when pairing digits, the whole number part of the decimals is paired right to left while the fractional part of the decimal numbers is paired left to right. In certain cases, there may not be enough digits to pair in the fractional part. Therefore, zero is added to the right to pair pairs. This does not change the value of the number. Emphasise this point multiple times while teaching them to avoid any mistakes. Secondly, the decimal is introduced in the square root when the whole number part is done, and the first group of decimals is brought down. Use examples from the textbook to explain how the square roots of decimals and non-perfect squares are found.

Competency 4:

- Recognise perfect cubes and find cubes of up to 2-digit numbers and cube root of up to 5-digit numbers which are perfect cubes.

Stimulus: Begin the lesson by asking students to look around the room and find 3D objects. Can they spot a cubical object or a cube around the classroom? A cube has three dimensions – length, width, and height. When measuring the volume of a cube, we multiply all three dimensions. Let's say if the length of a cube is 1 m, the width and height will also be 1 m and the volume will be: $1\text{m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m} = 1\text{ m}^3$. When a number is multiplied by itself three times, we get the cube of a number. For example, 2 is multiplied three times, that is, $2 \times 2 \times 2 = 8$. The cube of 2 is 8 or $(2)^3 = 8$. Similarly, $(-5)^3 = -125$ because $(-5) \times (-5) \times (-5) = -125$. Students often make the mistake of either adding the number three times or simply multiplying the number by 3. Emphasise that the number must be multiplied three times by itself to get a cube of a number. Like perfect squares, perfect cubes have three identical factors. 8 and 125 are perfect cubes. Point out to the students that decimals and fractions can also be cubed even though they may not result in a perfect cube. For example, $(0.3)^3 = 0.027$ which is not a perfect cube and $(\frac{4}{5})^3 = \frac{64}{125}$ also not a perfect cube.

Once the students gain mastery in cubing numbers, move on to explaining them that cube root of a

اگلے pair کو نیچے لاتے ہوئے اکثر طلبہ یہ سوچتے ہیں کہ جذرالمربع کسی عدد کا نصف یا پھر سادہ تقسیم ہے۔ اس لیے انھیں سمجھاتے ہوئے اس نکتے پر زور دیجیے کہ square root دراصل کسی عدد کو مربع بنانے کا اُلٹ عمل ہے۔یعنی اس عدد کو تلاش کرنا جسے خود سے ضرب دینے پر وہ مربع عدد حاصل ہو۔ اکثر طلبہ ہندسوں کے pairs بنانے میں یہ غلطی کرتے ہیں کہ وہ pairs بنانے کا آغاز بائیں طرف سے کرتے ہیں۔ انھیں یہ بات زور دے کر سمجھائیے کہ ہندسوں کی مقامی قیمت (place value) ہمیشہ دائیں سے بائیں طرف بڑھتی ہے لہٰذا pairs بنانے کا عمل بھی دائیں سے بائیں کیا جاتا ہے۔ ایک اور عام غلطی جو طلبہ کرتے ہیں وہ ہے ہندسوں کا غلط تخمینہ لگانا یعنی اگلا ہندسہ چنتے ہوئے وہ یہ نہیں جانچتے کہ حاصل ضرب تقسیم کنندہ (dividend) سے زیادہ تو نہیں ہو رہا۔ اس غلطی کو درست کرنے کا بہترین طریقہ یہ ہے کہ انھیں ایک سادہ سی ترکیب (simple hack) بتائیے

(تقسیم کنندہ divisor + تخمینی ہندسہ digit) + تخمینی ہندسہ digit ≥ موجودہ تقسیم شدہ عدد current divident

جب طلبہ کو long division method کے ذریعے جذرالمربع نکالنے کا طریقہ اچھی طرح سمجھ میں آجائے تو انھیں اعشاری اعداد (decimal mnumbers) کا جذرالمربع نکالنا سکھائیے۔ مکمل اعداد (whole number) کے مقابلے میں decimal number کا square root نکالنے میں بنیادی فرق یہ ہے کہ جب ہندسوں کو pairs میں توڑا جاتا ہے تو decimal number کے مکمل عددی حصے کو دائیں سے بائیں pairs میں توڑا یا تقسیم جاتا ہے۔ جب کہ اعشاری حصے (fractional part) کو بائیں سے دائیں جوڑا جاتا ہے۔بعض صورتوں میں یہ بھی ممکن ہے کہ fractional part میں pairs بنانے کے لیے ہندسے ناکافی ہوں لہٰذا pairs بنانے کے لیے دائیں طرف صفر کا اضافہ کرکے pair بنالیا جاتا ہے صفر کو بڑھانے سے عدد کی قیمت یا قدر (value) میں کوئی تبدیلی نہیں آتی۔ اس نکتے پر زیادہ زور دیجیے تاکہ کسی بھی غلطی سے بچا جا سکے۔ دوسری اہم بات یہ ہے کہ جب مکمل عددی حصہ مکمل ہو جائے اور پہلا اعشاری جوڑا نیچے لایا جائے۔ تو اسی وقت جذرالمربع میں اعشاری نقطہ شامل کیا جاتا ہے۔ درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کو استعمال کیجیے تاکہ طلبہ کو یہ سمجھ میں آسکے کہ اعشاری اعداد (decimals) اور (non-perfect squares) کا جذرالمربع کیسے نکالا جاتا ہے۔

قابلیت ۴

- کامل مکعب (perfect cubes) کو پہچانیں اور 2 ہندسی اعداد کے cubes اور 5 ہندسی اعداد جو perfect cubes ہیں کے جذرالمکعب کو معلوم کرسکیں۔

محرک: سبق کا آغاز کرتے ہوئے طلبہ سے کہیے کہ جماعت میں موجود 3D اشیا کو تلاش کیجیے۔ کیا انھیں کوئی مکعب شکل (cubical object) یا مکعب (cube) دکھائی دے رہا ہے۔ ایک مکعب سہ ابعادی ہوتا ہے یعنی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی جب ہم کسی مکعب کا حجم ناپتے ہیں تو ان تینوں کو آپس میں ضرب دیتے ہیں۔مثال کے طور پر اگر مکعب کی لمبائی 1 میٹر ہے تو اس کی چوڑائی اور اونچائی بھی 1 میٹر ہو گی اور حجم یہ ہو گا $1m \times 1\ m \times 1\ m = 1\ m^3$ جب کسی عدد کو تین بار خود اسی عدد سے ضرب دیا جائے تو ہمیں اس عدد کا مکعب حاصل ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 2 کو تین بار ضرب دیا یعنی $8 = 2 \times 2 \times 2$ لہٰذا 2 کا مکعب 8 ہے یا $8 = (2)^3$ اسی طرح $(-5)^3 = -125$ کیونکہ $-125 = (-5) \times (-5) \times (-5)$ اکثر طلبہ یہ غلطی کرتے ہیں کہ یا تو عدد کو تین بار جمع کر دیتے ہیں یا صرف عدد کو 3 سے ضرب کر دیتے ہیں لہٰذا انھیں یہ بات واضح طور پر سمجھائیے کہ اعداد کا مکعب حاصل کرنے کے لیے عدد کو تین بار خود سے ضرب دینا ضروری ہے۔ کامل مربعوں کی طرح، کامل مکعب میں تین ایک جیسے اجزائے ضربی factors ہوتے ہیں۔مثال کے طور پر 8 اور 125 کامل مکعب ہیں۔طلبہ کو بتائیے کہ اعشاریہ اور کسر کو بھی cube کیا جاسکتا ہے اگرچہ ان کا result ہمیشہ ایک مکمل cube میں نہیں ہوسکتا۔مثال کے طور پر $(0.3)^3 = 0.027$ جو کہ ایک مکمل مکعب نہیں ہے اور $\frac{64}{125} = (\frac{4}{5})^3$ ایک کامل مکعب (perfect cube) نہیں ہے۔

number is finding the number that is multiplied by itself thrice to result in a cube number. For example, if $(2)^3 = 8$, the cube root of 8 is 2. The symbol of cube root is $\sqrt[3]{\ }$. Mention to the students that cube root is the inverse of cubing a number and not finding one-third.

Explain to the students that prime factorisation is used to find the cube root of a number. Once all prime factors are determined using division ladder, we express the factors as triplets and one number from each triplet of prime factors. The product of the chosen factors is a cube root of the number. For example, the prime factors of 64 are $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$. So, the cube root of 64 is $2 \times 2 = 4$. Point out to the students that the prime factors of numbers that are perfect cubes occur in triplets and so the cube root of each number has one number from each triplet. Similarly, when finding the cube root of decimals, they are first converted as fractions. And then the cube root of the denominator and numerator is determined. The final simplified answer is the cube root of the cubed decimal. Fractions follow the same step. Use examples and exercise questions from the textbook to help students strengthen their understanding.

جب طلبہ cubing numbers میں مہارت حاصل کرلیں تو انھیں وضاحت سے سمجھایئے کہ کسی عدد کا جذر المکعب معلوم کرنے کا مطلب ہے کہ وہ عدد معلوم کرنا جسے خود سے تین بار ضرب دینے پر ایک مکعب عدد حاصل ہو۔ مثال کے طور پر اگر $8 = (2)^3$ تو 8 کا جذر المکعب 2 ہو گا۔ جذر المکعب کی علامت $\sqrt[3]{}$ ہے طلبہ کو بتایئے کہ جذر المکعب ایک عدد کو cube کرنے کا الٹ عمل (reverse process) ہے۔ اور اس کا مطلب کسی عدد کا ایک تہائی حصہ (one-third) نکالنا ہرگز نہیں۔

طلبہ کو سمجھایئے کہ ہر مکعب جذر (cube-root) معلوم کرنے کے لیے prime factorisation کا استعمال کیا جاتا ہے۔ جب تمام prime factors کو division ladder یا triplet کے ذریعے معلوم کر لیے جائیں تو ہم فیکٹرز کو triplets کے طور پر یعنی تین تین کے گروپ میں لکھتے ہیں اور ہر گروپ میں سے ایک عدد کو چنتے ہیں۔ پھر ان چنے گئے اعداد کو ضرب دیتے ہیں اور نتیجے میں جو حاصل ضرب (product) حاصل ہوتا ہے وہی اس عدد کا جذر المکعب ہے۔ مثال کے طور پر 64 کے prime factors $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ہیں۔ لہٰذا 64 کا جذر المکعب $2 \times 2 = 4$ ہے طلبہ کو یہ بات بھی سمجھایئے کہ مکمل مکعب اعداد (perfect cube) کے prime factors تین تین کے گروپ میں آتے ہیں لہٰذا جذر المکعب میں ہر گروپ (triplet) سے ایک عدد لیا جاتا ہے۔ اسی طرح جب اعشاری اعداد (decimals) کا جذر المکعب معلوم کیا جاتا ہے تو پہلے انھیں کسور (fractions) میں تبدیل کیا جاتا ہے پھر denominator اور numerator کے جذر المکعب کا تعین کیا جاتا ہے یوں آخر میں حاصل ہونے والا product ہی اعشاری عدد کا جذر المکعب ہے کسور (fractions) کے لیے بھی اسی طریقے کو استعمال کیا جاتا ہے۔ درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو کروایئے تاکہ طلبہ اس تصور میں پختگی پیدا کرسکیں۔

Unit 3

Compound Proportion

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Calculate direct, indirect, and compound proportions.

Stimulus: Students have basic knowledge of what proportion is. It is a way of stating that two ratios become equal. A ratio can be expressed as a fraction; therefore, a proportion says that two fractions are equal. If there is an increase or decrease in the ratio, the other ratio will change too. Recall the terms of the proportion - end terms (extremes) and middle terms (means). To find a missing term in proportion, we equate the product of extremes to the product of means.

Next recall two types of proportions to the students. In direct proportion, if one quantity increases, so does the other quantity, or if one quantity decreases, so does the other quantity. Whereas, in inverse or indirect proportion, if one quality increases, the other decreases or if one quantity decreases, the other increases.

In this competency, the students will learn about direct proportion. Since $y \propto x$, it is easy to determine how increase or decrease in one quantity will affect another quantity. When calculating how one variable will change another variable, we use a constant value, k. On the graph, direct proportion shows a straight line passing through the origin. In case of an increase in quantities, the graph goes upwards, whereas in case of a decrease, the graph goes downwards. On the contrary, for inverse proportion, $y \propto \frac{1}{x}$. This equation shows how when x increases, y decreases and vice versa. Graphically, the graph for inverse proportion is never straight, but rather curved. When making the graph, it is recommended to use a free hand to join the points.

Once the students can successfully solve problems related to direct or indirect proportions, move on to compound proportion. Compound proportion methods, involving more than two variables, are helpful to solve everyday problems in our lives and business problems involving partnerships and inheritance. Point out to students that while solving real-life problems based on compound proportions, we follow certain rules depending on the conditions involved. These problems can be solved by replacing the unknown value in equal proportions by x.

مرکب تناسب

قابلیت ۱

- direct، indirect اور compound تناسبوں کو حل کرسکیں۔

محرک: طلبہ کو تناسب (proportion) کے بارے میں بنیادی معلومات ہیں یہ دونسبتوں کے برابر (equal) ہوجانے کے عمل کو بیان کرنے کا ایک طریقہ ہے۔ یہ دونسبتوں کے برابر (equal) ہوجانے کے عمل کو بیان کرتا ہے جس کے ذریعے دونسبتوں کے برابر ہوجانے کے طریقے کو بیان کیا جاتا ہے۔نسبت (ratio) کو کسر (fractions) کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے لہٰذا تناسب (proportion) یہ بتاتا ہے کہ دو کسور (fractions) برابر ہیں اگر ایک نسبت (ratio) بڑھتی یا گھٹتی ہے تو دوسری نسبت (ratio) بھی تبدیل ہو گی۔طلبہ کے ساتھ تناسب میں missing term کو معلوم کرنے کے لیے ہم extremes کے حاصل ضرب کو means کے حاصل ضرب کے برابر کرتے ہیں۔

اب طلبہ کو یاد دلایئے کہ تناسب (proportions) دو طرح کے ہوتے ہیں۔ تناسب راست (direct proportion) جس میں ایک مقدار بڑھے تو دوسری بھی بڑھے گی۔ اور اگر ایک مقدار کم ہوتی ہے تو دوسری بھی کم ہوجاتی ہے۔ جب کہ تناسب معکوس (indirect or inverse proportion) جس میں ایک مقدار میں کمی ہو تو دوسری مقدار میں اضافہ ہوتا ہے اور اگر ایک مقدار میں اضافہ ہوتو دوسری میں کمی واقع ہوتی ہے

اس قابلیت میں طلبہ تناسب راست (direct proportion) کو سیکھیں گے کیونکہ $x \propto y$ ہوتا ہے لہٰذا یہ سمجھنا آسان ہے کہ ایک مقدار میں اضافہ یا کمی دوسری مقدار کو کیسے متاثر کرے گی۔ جب ہم یہ حساب لگاتے ہیں کہ ایک متغیر (variable) دوسرے متغیر (variable) کو کیسے تبدیل کرے گا تو ہم ایک مستقل قدر (constant value) 'k' استعمال کرتے ہیں۔ گراف پر direct proportion ایک سیدھی لائن یا لکیر دکھاتا ہے جو نقطۂ آغاز (origin) سے گزرتی ہے۔ لہٰذا مقدار میں اضافے کی صورت میں گراف اوپر کی طرف جاتا ہے جب کہ کمی کی صورت میں گراف نیچے کی طرف جاتا ہے۔ اس کے برعکس inverse proportion کے لیے $y \propto \frac{1}{x}$ یہ equation ظاہر کرتی ہے کہ جب x میں اضافہ ہوتا ہے تو y میں کمی واقع ہوتی ہے اور اس کے برعکس بھی یہی ہوتا ہے۔ گراف کی شکل میں (inverse proportion) کا گراف کبھی سیدھی لکیر میں نہیں ہوتا بلکہ یہ ذرا خمیدہ (curved) شکل میں ہوتا ہے۔ لہٰذا اس گراف کو بنانے کے لیے یہ تجویز دی جاتی ہے کہ نقاط (points) کو ملاتے وقت free hand کا استعمال کیجیے۔

جب طلبہ راست (Direct) اور معکوس (indirect) تناسبوں والے عبارتی سوالوں کو اچھی طرح سمجھ کر حل کرنے کے قابل ہو جائیں تو انھیں compound proportion کے بارے میں بتایئے۔جس میں دو سے زیادہ متغیرات (variables) شامل ہیں۔ یہ ہماری زندگی میں روزمرّہ کے مسائل اور کاروباری معاملات جیسے شراکت داری اور وراثت سے متعلق مسائل کو حل کرنے میں مددگار ثابت ہوتے ہیں طلبہ کو یہ نکتہ وضاحت کے ساتھ سمجھایئے کہ ہم مرکب تناسب پر مبنی روزمرّہ زندگی کے مسائل کو صورت حال کے مطابق حل کرنے کے لیے مخصوص اصولوں کی پیروی کرتے ہیں۔ ان مسائل کو مساوی تناسب میں نامعلوم value کو x سے بدل کر حل کیا جا سکتا ہے۔

Unit 4 Financial Arithmetic

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Convert Pakistani currency to well-known international currencies and vice versa

Rationale: The outcome of this competency is to develop financial literacy amongst students as a part of everyday life. We deal with money all the time. This skill helps the students manage budgeting, understand taxes and the rules of inheritance, insurance, etc. Students are already familiar with basic financial arithmetic. Here, they will learn more about currency conversion, insurance, and inheritance.

Stimulus: Begin the lesson by asking the students if they know anyone who lives abroad. If they say yes, ask them if they know which currency they use. Ask them if they have seen any exchange places around the town. Once you get all the answers, divide the class into groups. Provide them with a list of objects with foreign currencies. Ask them to recognise the currency and the country it is used in. Help them out if they are stuck. Now, ask them how they can convert the objects with foreign price tags into Pakistani rupees. Once the activity is done, introduce the students to currencies used all around the world. Mention the prominent currencies – United States Dollars (USD), Great British Pounds (GBP), Arab Emirates Dirhams (AED), Saudi Arab Riyals (SAR), Chinese Yuan and Japanese Yen. To convert currency, students will be using unitary method that they have previously learnt in primary classes; this is because the exchange rate of any currency is equal to one unit of local currency.

Usually, the conversion or exchange rate is provided, and students are to calculate how much of one currency money is when converted. That is, if a is the money in one currency, and b is the conversion rate, $a \times b$ = the amount of money after exchange (c). This formula is manipulated according to need. For example, if the conversion rate of USD to PKR is 1 USD = 282 PKR. The unit rate of USD is known to convert 50 USD to PKR, 50×282 = PKR 14100. Similarly, if PKR 50 000 is to be converted to USD, we divide, that is $\frac{50000}{282}$ = 177.30 USD. However, point out that the buying and selling rates of currency are usually different. We buy at a slightly higher conversion rate and sell at a slightly lesser currency rate. Use the examples and exercise from the textbook to help students master this competency.

Competency 2:

- Explain and calculate profit percentage, loss percentage, and discount

Stimulus: Students have prior knowledge of how to calculate profit, loss and discount. Recall with them that the cost price is the price at which an item is purchased, whereas the selling price is the price at which the item is sold. If the cost price is greater than the selling price, it would result in a

مالیاتی حساب

قابلیت ۱

پاکستانی کرنسی کو معروف بین الاقوامی کرنسیوں میں ادل بدل سکیں۔

استدلال: اس قابلیت کا مقصد طلبہ میں مالیاتی شعور کو فروغ دینا ہے تاکہ وہ روزمرّہ زندگی میں پیسے کے لین دین سے نمٹنے کا ہنر سیکھ سکیں اور بجٹ بنانے، ٹیکس انشورنس (بیمہ) اور وراثت کے اصولوں وغیرہ کو بہ آسانی سمجھ سکیں۔ طلبہ پہلے ہی سے مالیاتی حساب (financial arthmatic) سے واقفیت رکھتے ہیں۔ اب وہ کرنسی کی تبدیلی، انشورنس اور وراثت کے بارے میں مزید جانیں گے۔

محرک: سبق کا آغاز اس سوال کے ساتھ کیجیے کہ کیا وہ کسی ایسے شخص کو جانتے ہیں جو بیرون ملک رہائش پذیر ہو؟ اگر ان کا جواب ہو 'جی ہاں' تو ان سے پوچھیے کہ وہ کون سی کرنسی استعمال کرتے ہیں؟ پھر ان سے پوچھیے کہ کیا انھوں نے شہر میں یہاں اس کے آس پاس وہ جگہ دیکھی ہے جہاں پر کرنسی تبدیل (exchange) کی جاتی ہے آپ کو تمام جوابات مل جائیں تو جماعت میں موجود طلبہ کو گروہوں میں بانٹ دیں۔ ہر گروہ کو غیر ملکی کرنسی کے ساتھ اشیا کی ایک فہرست دیجیے اور ان سے کہیں کہ وہ کرنسی کو پہچانیں اور بتائیں کہ یہ کسی ملک میں استعمال ہوتی ہے اگر وہ دوران سرگرمی کہیں مشکل محسوس کریں تو ان کی رہنمائی کیجیے۔ پھر ان سے پوچھیے کہ وہ غیر ملکی قیمتوں کے ٹیگ لگی اشیا کو پاکستانی روپے میں کیسے تبدیل کر سکتے ہیں ایک بار سرگرمی مکمل ہو جائے تو طلبہ کو دنیا بھر میں استعمال ہونے والی کرنسیوں سے متعارف کروایئے۔ اہم کرنسیوں کا ذکر خاص طور پر کیجیے جیسے امریکی ڈالر (USD)، برطانوی پاؤنڈ (GBS) متحدہ عرب امارات (AED)، سعودی عرب ریال (SAR)، چینی یوان، جاپانی ین، طلبہ کرنسی کی تبدیلی کے لیے وہی (unitary method) استعمال کریں گے جو انھوں نے ابتدائی جماعتوں میں سیکھا تھا؟ اس کی وجہ یہ ہے کہ کسی بھی کرنسی کی شرح تبادلہ (exchange rate) مقامی کرنسی کی ایک اکائی (one unit) کے برابر ہوتا ہے۔

عام طور پر کرنسی کی تبدیلی یا ایکسچینج ریٹ فراہم کیا جاتا ہے جس کی مدد سے طلبہ کو حساب لگانا ہوتا ہے کہ ایک کرنسی میں موجود رقم دوسری کرنسی میں تبدیل ہونے پر کتنی ہو گی یعنی اگر a ایک کرنسی میں رقم ہے اور تبادلوں کی شرح ہے تو $b \times a = c$ تبدیلی کے بعد کی رقم اس فارمولے میں ضرورت کے مطابق تبدیلی کی جاتی ہے۔مثال کے طور پر اگر USD سے PKR میں تبدیلی کی جائے تو تبدیلی کی شرح 222 PKR = 1 USD لہٰذا 50 USD کو پاکستانی روپوں میں تبدیل کرنے کے لیے $50 \times 282 = 14100$ روپے۔ اسی طرح اگر 50000 پاکستانی روپوں کو USD میں تبدیل کرنا ہو تو ہم تقسیم کریں گے یعنی $\frac{50000}{282} = 177.30$ USD تاہم اس بات کی نشان دہی بھی کیجیے کہ کرنسی کی خرید و فروخت کے بھاؤ مختلف ہوتے ہیں ہم کرنسی کو خریدتے ہیں تو عموماً کرنسی کے rate قدرے زیادہ ہوتے ہیں لیکن جب ہم اسے فروخت کرتے ہیں تو ہمیں قدرے کم rate ملتے ہیں۔
اس مہارت پر عبور حاصل کرنے کے لیے طلبہ کو درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو زیادہ سے زیادہ کروایئے۔

قابلیت ۲

- منافع کا فیصد، نقصان کا فی صد اور رعایت کی وضاحت اور حساب لگا سکیں۔

محرک: طلبہ کو پہلے سے علم ہے کہ منافع، نقصان اور رعایت کا حساب کیسے لگایا جاتا ہے ان کو یاد دلایئے کہ لاگت وہ قیمت ہے جس پر کوئی چیز خریدی جاتی ہے جب کہ قیمت فروخت سے مراد وہ قیمت ہے جس پر کوئی چیز فروخت کی جاتی ہے اگر کسی چیز کی لاگت کی قیمت اس کی قیمت فروخت سے زیادہ ہے تو اس کے نتیجے میں نقصان ہو گا لیکن اگر قیمت فروخت اس کی قیمت خرید یا لاگت سے زیادہ ہو تو آپ کو فائدہ حاصل ہو گا۔ ہمیشہ یاد رکھیں کہ منافع یا نقصان ان کا فی صد لاگت کی قیمت (cost price) کے لحاظ سے شمار کیا جاتا ہے کیونکہ یہ بیچنے والے کی طرف سے کی گئی ابتدائی سرمایہ کاری ہے ان سے پوچھیے کہ رعایت (discount) سے کیا مراد ہے۔ انھیں یاد دلایئے کہ رعایت وہ کمی ہے جو کسی چیز کی اصل قیمت (marked price) loss. Whereas, if the selling price is greater than the cost price, it would result in a profit. Recall that the percentage of profit or loss is calculated in terms of cost price as it is the initial investment made by the seller. Ask them what discounts are. Revise with them that discount is a reduction in the marked price. Point out to the students that discounts are only calculated on marked price and not on selling or cost price. Recall the following formulas and how they can be manipulated using different examples from the textbook:

- profit = selling price - cost price
- loss = cost price - selling price
- profit % = $(\frac{\text{profit}}{\text{cost price}}) \times 100$
- loss % = (loss/cost price) × 100
- discount percentage = $(\frac{\text{discount}}{\text{marked price}}) \times 100$.

Once the students have revised and recalled what they have previously learnt, introduce them to the term 'successive discount' and ask them what they think it means. Explain to them that a successive discount is a discount offered over another discount. For example, at an annual sale, a shop offers 15% discount. But if you buy from the shop for the first time, you get an additional 10% discount. This additional 10% discount will be calculated on the selling price after 15% reduction on the marked price. For example, an article has a marked price PKR 5000. So, after 15% discount, the selling price will be $(\frac{15}{100}) \times 5000 = 5000 - 750 = 4250$. Now a successive discount will be calculated on 4250 instead of 5000, so $(\frac{10}{100}) \times 4250 = 4250 - 425 =$ PKR 3825. So, PKR 3825 will be the final selling price of the article. Students often tend to apply (15% + 10%) on the overall price. Point out to them that the second discount is applied on the already reduced price and that successive discounts are not additive. Use the exercise from textbook to help the students practice calculation of successive discounts.

Competency 3:

- Explain and calculate profit/markup, principal amount, and markup rate

Stimulus: This competency depends on the student's ability to calculate markup on the principal amount. For this, the students, first, need to understand what markup is. Explain to them that at times, businesses often need to borrow money from institutions such as banks or individuals. The sum of money that a person borrows or lends is called the principal amount. The rate at which this money is borrowed is the markup rate. This rate is expressed as percentage. The amount of time, in years, that money is borrowed for is called the period. Therefore, the sum of money borrowed along with the amount of money calculated by markup rate together, is called profit or markup. When money is deposited in banks, the extra money that the bank gives back is called the profit. When the borrowed money is returned with the extra amount, it is called markup. Explain to the students that markup is calculated using the following formula:

میں کی جاتی ہے۔طلبہ کو یہ بات واضح طور پر بتایئے کہ رعایت (discount) صرف اصل قیمت (marked price) پر calculate کی جاتی ہے۔ یہ قیمت خرید (cost price) یا قیمت فروخت (selling price) پر نہیں نکالی جاتی۔ اب ذیل میں دیے گئے فارمولے کو طلبہ کے ساتھ مل کر دہرایئے اور درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کے ذریعے ان میں کی جانے والی مختلف صورتوں میں تبدیلی کو سمجھایئے۔

- قیمت خرید – قیمت فروخت = منافع
- قیمت فروخت – قیمت خرید = نقصان
- $\left(\frac{\text{منافع}}{\text{قیمت خرید}}\right) \times 100 = $ منافع%
- $\left(\frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}}\right) \times 100 = $ نقصان%
- قیمت فروخت – اصل قیمت = رعایت
- $\left(\frac{\text{رعایت}}{\text{اصل قیمت}}\right) \times 100 = $ رعایت%

طلبہ نے اب تک جو کچھ سیکھا ہے جب وہ اسے دہرا چکیں تو انھیں مسلسل رعایت (successive discount) کے تصور سے متعارف کروائیں اور ان سے پوچھیے کی ان کے خیال میں اس کا کیا مطلب ہے۔ پھر انھیں سمجھایئے کہ اس سے مراد وہ رعایت (discount) ہے جو ایک رعایت کے بعد دوسری رعایت پر دی جاتی ہے۔مثال کے طور پر سالانہ فروخت پر ایک دکان 15% فی صد رعایت پیش کرتی ہے لیکن اگر آپ پہلی بار دکان سے خریدتے ہیں تو آپ کو پہلی خریداری پر 10% فی صد رعایت ملتی ہے۔ اس اضافی 10% فی صد رعایت کا حساب marked price پر 15% فی صد کمی کے بعد کیا جائے گا۔مثال کے طور پر ایک چیز کی marked price یعنی اس پر لکھی ہوئی قیمت 5000 روپے ہے تو 15% فی صد رعایت (discount) کے بعد فروخت کی قیمت $\left(\frac{15}{100}\right) \times 5000 = 5000 - 750 = 4250$ ہو گی۔ اب لگاتار یا مسلسل رعایت کا حساب 5000 کے بجائے 4250 پر کیا جائے گا لہٰذا $\left(\frac{10}{100}\right) \times 4250 = 4250 - 425 =$ PKR 3825 یعنی آخری قیمت 3825 روپے ہو گی جس پر وہ چیز فروخت کی جائے گی۔ اکثر طلبہ یہ غلطی کرتے ہیں کہ وہ دونوں رعایتوں (discounts) کو جمع کر کے (15% + 10%) پوری قیمت پر لاگو کر دیتے ہیں۔ انھیں واضح طور پر یہ نکتہ سمجھایئے دوسری رعایت، پہلی رعایت کے بعد کی قیمت پر لاگو ہوتی ہے اور مسلسل رعایتیں جمع نہیں کی جاتیں۔طلبہ کو یہ تصور بہتر طور پر سمجھانے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مشقوں کا استعمال کیجیے تا کہ وہ مسلسل رعایتوں successive discount کا حساب لگانے کی مشق کر سکیں۔

قابلیت ۳:

- منافع/مارک اپ، اصل رقم اور مارک اپ کی شرح کی وضاحت کریں اور حساب لگائیں۔

محرک: یہ قابلیت طلبہ کی اصل رقم (principal amount) پر مارک اپ کا حساب لگانے کی صلاحیت پر منحصر ہے۔ اس لیے طلبہ کو پہلے یہ سمجھنا ہو گا کہ markup کیا ہے۔ انھیں بتایئے کہ بعض اوقات کاروباری اداروں کو افراد یا بنکوں سے رقم ادھار یا قرض پر لینی پڑتی ہے۔ تو جو رقم ادھار لی یا دی جاتی ہے۔ اسے اصل رقم (principal amounts) کہا جاتا ہے اور جس شرح (rate) پر یہ رقم قرض لی جاتی ہے اسے مارک اپ ریٹ کہا جاتا ہے۔ اس شرح کو فی صد کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے اور جس مدت (period) کے لیے یہ رقم ادھار یا قرض لی جاتی ہے وہ سالوں میں ظاہر کی جاتی ہے۔ لہٰذا جو رقم قرض لی گئی ہو اس پر مارک اپ کے حساب سے جو اضافی رقم بنتی ہے ان دونوں کو ملا کر جو کل رقم بنتی ہے اس کو منافع یا مارک اپ کہا جاتا ہے۔ جب بینک میں رقم جمع کی جاتی ہے تو بینک اس پر جو اضافی رقم واپس کرتا ہے وہ منافع (profit) کہلاتی ہے۔ اسی طرح جب

$$\text{Markup amount} = \text{principal} \times \text{markup rate} + \text{time period}$$

$$\text{Amount} = \text{principal amount} + \text{markup amount}$$

Point out to the students that the above formula can be manipulated to calculate any unknown value. For example, A person invested money at the markup rate of 10% per year for 7 months yields Rs 8400, find the principal amount.

$$\text{Markup amount} = \text{principal} \times \text{markup rate} + \text{time period}$$

$$8400 = \text{principal amount} \times \left(\frac{10}{100}\right) \times \left(\frac{7}{12}\right)$$

$$8400 = \text{principal amount} \times 0.0583$$

$$\text{principal amount} = \frac{8400}{0.583}$$

$$= \text{Rs } 14408$$

Use different examples and questions from the textbook to help students master this competency.

Competency 4:

- Explain insurance, partnership, and inheritance

Stimulus: At this point, students are well versed in financial transactions and literacy. Move on to explain to the students about insurance. To avoid any risks, people and companies pay a small amount to the insurance company, who in return protect them financially against unfortunate events. Insurance can be of many kinds. There is health insurance, risk insurance, vehicle insurance etc. The company who sells insurance is the insurer and the person who buys insurance is called the insured. The insurance fee is called a premium which is valid for a period called the term of policy. The insurance that is sold is called a policy. The compensation money given by the insurance company is called the face value of the policy. Use the textbook to explain life and vehicle insurance in detail. The amount of premium is calculated in the same way as we calculate the percentage of a value or quantity. For example, If Ali insures his car for Rs 800 000 under comprehensive insurance at an annual premium rate of 6% of the face value of the policy, we pay a premium of:
$\frac{6}{100} \times 80000 = \text{Rs } 48000$. Use the examples and exercises from the textbook to further explain insurance to the students.

قرض یا ادھار لی گئی رقم اضافی رقم کے ساتھ بینک کو واپس کی جاتی ہے وہ اضافی رقم مارک اپ کہلاتی ہے طلبہ کو بتایئے کہ وہ مارک اپ کو مندرجہ ذیل فارمولے کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

مارک اپ کی رقم = اصل رقم × مارک اپ کی شرح مدت

Amount = اصل رقم + مارک اپ کی رقم

طلبہ کو یہ بات وضاحت کے ساتھ سمجھایئے کہ مارک اپ کا فارمولا کسی بھی نامعلوم مقدار کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر ایک شخص نے 10% فی صد سالانہ مارک اپ ریٹ کے ساتھ 7 ماہ کے لیے رقم کی سرمایہ کاری کی اسے 8400 روپے منافع ملا تو اصل رقم (principal amount) معلوم کیجیے۔

مارک اپ کی رقم = اصل رقم × مارک اپ کی شرح + مدت

8400 = اصل رقم × $(\frac{10}{100}) \times (\frac{7}{12})$

8400 = اصل رقم × 0.0583

اصل رقم = $\frac{8400}{0.583}$

$= 14408$

درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو کروایئے تا کہ طلبہ اس قابلیت پر عبور حاصل کر سکیں۔

قابلیت ۴:

- انشورنس (بیمہ کاری)، شراکت داری (partnership) اور وراثت (inheritance) کی وضاحت کر سکیں۔

اس مرحلے تک پہنچ کر طلبہ مالیاتی لین دین (financial transactions) اور مالیاتی خواندگی میں کافی عبور حاصل کر چکے ہیں۔ لہٰذا انھیں انشورنس (بیمہ کاری) کے بارے میں بتایئے کہ کسی بھی ناگہانی خطرے سے بچنے کے لیے لوگ اور کمپنیاں انشورنس کمپنی کو تھوڑی سی رقم ادا کرتے ہیں جو بدلے میں ان کو ناخوشگوار واقعات سے مالی طور پر تحفظ فراہم کرتی ہے انشورنس کئی طرح کا ہوتا ہے۔ جیسے ہیلتھ انشورنس، رسک انشورنس، گاڑیوں کی انشورنس وغیرہ۔ وہ کمپنی جو انشورنس فراہم کرتی ہے اسے (insurer)، وہ شخص جو انشورنس خریدتا ہے اسے insured اور انشورنس کی فیس premium اور وہ وقت یا مدت جس کے دوران پالیسی مؤثر ہوتی ہے وہ پالیسی کی مدت (term of policy) کہلاتی ہے۔ وہ انشورنس جو فروخت کی جاتی اسے پالیسی (policy)، وہ رقم جو انشورنس کمپنی حادثے یا نقصان کی صورت میں ادا کرتی ہے وہ face policy کہلاتی ہے۔ گاڑیوں اور زندگی کی انشورنس کی تفصیل وضاحت سے بیان کرنے کے لیے درسی کتاب کا استعمال کیجیے۔ premium معلوم کرنے کا طریقہ وہی ہے جو ہم کسی مقدار کی value یا فی صد کو نکالنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔مثال کے طور پر اگر علی اپنی گاڑی کو comprehensive insurance کے تحت 80000 روپے میں پالیسی کی فیس ویلیو کے 6% فی صد والی سالانہ پریمیم کی شرح پر انشورنس کرواتا ہے تو وہ اس کا پریمیم $\frac{6}{100} \times 80000 =$ Rs 48000 روپے ادا کرتا ہے۔ درسی کتاب انشورنس مزید وضاحت سے سمجھانے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کا استعمال کیجیے۔

Once the students can successfully solve insurance questions, move on to inheritance. In Pakistan, we follow the laws of inheritance according to the Shariah law. In Islam, there are certain conditions of how inheritance is distributed. If a man dies, his inheritance is distributed in such a way that his wife gets $1/8^{th}$ of it. The rest is distributed in such a way that a son inherits twice the share of a daughter. To calculate inheritance, we reinforce the applications of ratio and percentages.
For example,

if a man leaves behind Rs 50000,

$$\text{his wife will get } \frac{1}{8} \times 50000 = \text{Rs } 6250.$$

$$\text{Amount left} = 50000 - 6250 = \text{Rs } 43750$$

Now, considering a man has a son and a daughter, the rest of his inheritance will be distributed as:

Son's share: daughter's share

2 : 1

$$\text{So, son's share } \frac{2}{3} \times 43750 = \text{Rs } 29166.67, \text{ and}$$

$$\text{daughter's share} = \frac{1}{3} \times 43750 = 14583.33.$$

Similarly, partnership is also calculated using ratio or percentage of how much each partner has invested in a business. Use the examples and exercises from the textbook to help the students attain mastery in his competency.

جب طلبہ انشورنس سے متعلقہ عبارتی سوالوں کو اچھے طریقے سے حل کرنے لگیں تو انھیں وراثت کے بارے میں بتائیے پاکستان میں ہم شریعت کے مطابق وراثت کے قوانین پر عمل کرتے ہیں۔ اسلام میں وراثت کی تقسیم کی کچھ شرائط ہیں۔ اگر مرد فوت ہو جائے تو اس کی وراثت کچھ اس طرح تقسیم کی جاتی ہے کہ اس کی بیوی کو اس کا آٹھواں حصہ ملے گا۔ باقی کی تقسیم کچھ اس طرح ہو گی کہ بیٹی کے مقابلے میں بیٹے کو دوگنا حصہ ملے گا۔ وراثت کا حساب لگانے کے لیے ہم ratio اور percentage کا استعمال کرتے ہیں۔مثال کے طور پر

اگر ایک شخص نے اپنے پیچھے 50000 روپے چھوڑے

تو اس کی بیوی کو ملیں گے۔ $\frac{1}{8} \times 50000 = 6250$ روپے

باقی رقم $50000 - 6250$ روپے $= 43256$

اب اگر کسی شخص کا ایک بیٹا اور ایک بیٹی بھی ہے تو اس کی باقی وراثت کچھ اس طرح تقسیم ہو گی:

بیٹی کا حصہ : بیٹے کا حصہ $= 1 : 2$

اس لیے بیٹے کا وراثت میں حصہ ہو گا $43750 \times \frac{2}{3} = 29166.67$ روپے اور

بیٹی کا وراثت میں حصہ ہو گا $43750 \times \frac{1}{3} = 14383.33$ روپے

اس طرح، شراکت داری (partnership) کا حساب بھی تناسب یا فی صد کا استعمال کرتے ہوئے لگایا جاتا ہے کہ ہر شراکت دار (partner) نے کاروبار میں کتنی سرمایہ کاری کی۔ طلبہ کو اس قابلیت میں مہارت دینے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو استعمال کیجیے۔

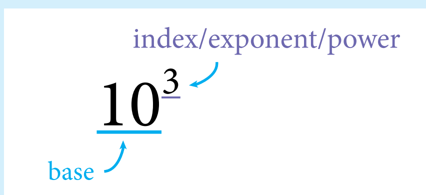
Unit 5 Algebra: Polynomials

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Identify base, index/exponent, and its value
- Deduce and apply the following laws of exponents/indices:
  - Product law
  - Quotient law
  - Power law

Stimulus: Students have previously learnt that there is a special way of writing a number that is multiplied multiple times. This method is called index notation. Square and cube numbers are written in the form of index notation. Understanding index notation is essential for algebra and working with exponents. Begin the lesson by writing 3^5 on the board. Ask the students to use their prior knowledge and deduce what it means. Now write 3×5 and $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ on the board beneath 3^5 and ask them which is the correct one. Most of the students are likely to say the latter. For the students who were not able to answer, recall and revise with them that 3^5 is index notation for $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ because it tells us that 3 was multiplied five times to itself. Tell them that 3 is the base number and tells us the number being multiplied and 5 is the exponent/index/power that is the number of times the number is multiplied. When solved, 3^5 is the index notation for 243.



Similarly, 10^3 means 10 is multiplied thrice and results in 1000. Explain to the students that if $a^n = x$, a^n is the index form of x, the base $a \neq 0$ and n is the index or power. The word 'indices' is the plural for index. We say that 3 is raised to the power of 5 or 10 is raised to the power of 3. Write multiple examples of index notations on the board and ask them to identify the base and the exponents to reinforce the student's learning.

Once the students can easily identify and differentiate between base and exponent/index/power, move on to explaining to the students that certain laws apply on indices. The first law is the product law which states that if two numbers are multiplied that have the same base but different index, the exponents are added, $a^m \times a^n = a^{m+n}$. For example: $6^6 \times 6^4$ have the same base, 6, but different exponents, that is 6 and 4, respectively. So, the exponents will be added: $6^6 \times 6^4 = 6^{6+4} = 6^{10}$. However, if the bases are different but the exponents are the same, the bases are put in a bracket and multiplied

باب ۵
الجبرا: کثیر رقمی

قابلیت ا

- base، exponents/index اور اس کی value کو شناخت معلوم کرسکیں۔
- indices/exponent کے قوانین کو اخذ کریں اور ان کا اطلاق کرسکیں۔
  - product law
  - quotient law
  - power law

محرک: طلبہ پہلے سے واقف ہیں کہ ایسا عدد جو متعدد بار ضرب دیا جائے اسے لکھنے کا ایک خاص طریقہ ہے جسے index notation کہتے ہیں۔ squares اور cube numbers کو index notation کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ الجبرا میں exponents کے ساتھ کام کے لیے index notations کو سمجھنا بے حد ضروری ہے سبق کی ابتدا میں بورڈ پر 3^5 لکھیے۔ اور طلبہ سے کہیں وہ اپنی گزشتہ معلومات کو استعمال کرتے ہوئے بتائیں کہ اس کا کیا مطلب ہے۔ اب 3^5 کے نیچے 3×5 اور $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ بورڈ پر لکھیے اور طلبہ سے پوچھیے کہ ان میں سے کون سا درست ہے۔ ان کی غالب اکثریت کا جواب ہو گا بعد والا جو طلبہ جواب نہ دے سکیں ان کے لیے دوبارہ بتائیے کہ 3^5، $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ایک index notation ہے کیونکہ یہ ہمیں بتاتا ہے کہ 3 کو 5 بار خود سے ضرب دیا گیا ہے۔ انھیں بتائیے کہ 3 کو بنیادی نمبر (base number) کہتے ہیں یعنی وہ عدد جسے ضرب دیا جارہا ہے اور 5 کو power / index /exponent کہتے ہیں یعنی وہ عدد جو بتاتا ہے کہ base number کو کتنی بار ضرب دیا جائے۔ جب حل کیا جائے تو پتہ چلتا ہے کہ 3^5 کی value 243 ہے۔

index/exponent/power

10^3

base

اسی طرح 10^3 کا مطلب ہے کہ اسے خود سے تین بار ضرب دیا جائے تو نتیجہ 1000 ہو گا طلبہ کو وضاحت سے بتائیے کہ اگر $a^n = x$، a^n، x کی ایک index form ہے تو base $a \neq 0$ اور n انڈیکس یا طاقت (power)، index کی جمع (indices) ہے ہم کہتے ہیں 3 کو 5 کی طاقت (power) پر بڑھایا گیا ہے۔ اور 10 کو 3 کی طاقت (power) پر بڑھایا گیا۔ اب بورڈ پر index notations کی متعدد مثالیں لکھیے۔ اور طلبہ سے کہیں کہ وہ ان میں base number اور exponent کی شناخت کریں تاکہ طلبہ کے سیکھنے کے عمل کو جلا بخشی جا سکے طلبہ کو جب base اور exponent/index/power کا فرق سمجھ لیں اور وہ بہ آسانی انھیں شناخت کرنے لگیں تو انھیں indices پر لاگو ہونے والے مخصوص قوانین کے بارے میں بتائیے۔ پہلا قانون حاصل ضرب کا قانون (law of product) ہے جو بتاتا ہے کہ اگر دو ایسے عددوں کو ضرب دیا جائے جن کا base ایک جیسا ہو لیکن index مختلف ہوں تو قوت نما (exponents) کو جمع کیا جاتا ہے۔ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ مثال کے طور پر: $6^4 \times 6^6$ میں base ایک جیسا ہے لیکن قوت نمبر (exponents) مختلف ہیں یعنی بالترتیب 6 اور 4 اس لیے exponents کو جمع کیا جائے گا: $6^6 \times 6^4 = 6^{6+4} = 6^{10}$ تاہم اگر base مختلف ہوں لیکن exponents ایک جیسے ہوں تو bases کو بریکٹ (قوسین)

and then raised to the power x, that is $a^m \times b^m = (ab)^m$.
For example: $3^4 \times 5^4 = (3 \times 5)^4 = (15)^4 = 15 \times 15 \times 15 \times 15 = 50625$.
Students often tend to add bases instead of exponents, therefore emphasise on both the conditions multiple times to help them understand clearly.

Now, explaining to them the next law, the quotient law. As the name suggests, this law is related to the division. When the bases are the same, but the exponents are different, the exponents are subtracted, $a^m \div a^n = a^{m-n}$. For example: $5^4 \div 5^2 = 5^{4-2} = 5^2$

However, if the bases are different and the exponents are the same, we divide the bases and then raise them to the power, $a^n \div b^n = (\frac{a}{b})^n$. For example, $(\frac{14}{7})^2 = (2)^2 = 4$. Students often get confused and subtract the bases and divide the exponents. Therefore, ample practice should be done to avoid such errors. Finally, discuss the power law with the students and explain that when there is a power on an already powered number, the powers are multiplied, $(a^m)^n = a^{mn}$.
For example: $(3^4)^2 = (3)^{4\times2} = 3^8$.

Move on to explain to the students that if the exponent is a negative number, the base is reciprocated and then the base has a positive exponent which can be further simplified. Similarly, if the base is a negative number, the exponent determines if the answer will be a positive or a negative number. That is, if the exponent is an even number, the answer will be positive. However, if the exponent is an odd number, the power will be negative. Use the examples and exercise from the textbook to help students gain mastery in this competency.

Competency 2:

- Recall the addition and subtraction of polynomials
- Recall the multiplication of polynomials
- Divide a polynomial of degree up to 3 by: a monomial and a binomial

Stimulus: In prior grades, students learnt the difference between open and close statements. Recall with them that open statements contain incomplete information to determine if it's true or false. A closed statement, however, is either always true or always false statement with complete information. In algebra, because of variables, there are usually open statements. Next, move on to revising with them that a polynomial is an expression which consists of variables and coefficients and mathematical operators. A polynomial may be a monomial, that is an expression consisting of one term that may be a single numeral, variable or the product of numeral and one (or more) variables. It may also be a binomial, that is an expression consisting of two terms, and a trinomial, as the name suggests, consisting of three terms. The degree of a polynomial is determined by finding the highest exponent of any terms in the expression. For example, the highest degree of $2x^3 - 5x^4 + 3x^2$ is 4.
Ask the students to differentiate between like and unlike terms. By this point, they should be well-versed with the difference as they have learnt and applied the use of like and unlike terms during addition and subtractions of polynomials. Revise that the addition of polynomials can be done horizontally or vertically. Number operations applied on polynomials follow the sign rule of

میں رکھا جائے گا اور انھیں ضرب دیا جائے گا پھر اس نتیجے کو x power پر لے جایا جائے گا یعنی $a^m \times b^m = (ab)^m$ مثال کے طور پر
$3^4 \times 5^4 = (3 \times 5)^4 = (15)^4 = 15 \times 15 \times 15 \times 15 = 50625$
اکثر طلبہ یہ غلطی کرتے ہیں کہ وہ exponents کے بہ جائے bases کو جمع کر دیتے ہیں لہٰذا انھیں یہ بات زور دیتے ہوئے کئی بار سمجھائیے تاکہ وہ ان دونوں conditions کو بہت اچھی طرح سمجھ لیں پڑھائی کا سلسلہ جاری رکھتے ہوئے انھیں اگلا قانون تقسیم کا قانون "quotient law" سمجھائیے جیسا کہ نام سے ہی ظاہر ہے کہ یہ قانون تقسیم سے متعلق ہے جب دو ایسے اعداد کو تقسیم کیا جائے جن کا base ایک جیسا ہو لیکن قوت نما Exponents مختلف ہوں تو exponents کو نفی کیا جاتا ہے۔ $a^m \div a^n = a^{m-n}$ مثال کے طور پر $5^4 \div 5^2 = 5^{4-2} = 5^2$ تاہم اگر bases مختلف ہوں اور exponents ایک جیسے ہوں تو ہم bases کو تقسیم کرتے ہیں اور اس نتیجے کو power پر لے جاتے ہیں، $a^n \div b^n = (\frac{a}{b})^n$ مثال کے طور پر $4 = (2)^2 = (\frac{14}{7})^2$ اکثر طلبہ یہ غلطی کرتے ہیں کہ bases کو نفی اور exponents کو تقسیم کر دیتے ہیں۔ لہٰذا ایسی غلطیوں سے بچنے کے لیے ضروری ہے کہ زیادہ سے زیادہ مشق طلبہ کو کروائی جائے۔ اب سبق کو جاری رکھتے ہوئے طلبہ کو سب سے اگلے اور آخری قانون power law کے بارے میں بتائیے کہ جب کسی عدد پر پہلے سے power موجود ہو اور اس پر دوبارہ power لگائی جائے تو ان دونوں powers کو آپس میں ضرب کیا جاتا ہے۔ $(a^m)^n = a^{mn}$ مثال کے طور پر $3^8 = (3)^{4\times2} = (3^4)^2$ طلبہ کو وضاحت سے یہ بات سمجھائیے کہ اگر exponents ایک منفی عدد ہو تو base کو ضربی معکوس بنا دیا جاتا ہے پھر مثبت exponent کو حل کیا جاتا ہے ضرورت کے مطابق اسے مزید آسان بنایا جا سکتا ہے۔ اسی طرح اگر base ایک منفی عدد پر مشتمل ہو تو exponent یہ تعین کرتا ہے کہ آیا جواب ایک مثبت عدد ہو گا یا پھر منفی عدد یعنی exponent ایک جفت عدد (even number) ہو تو جواب ایک مثبت عدد ہو گا۔ تاہم exponent اگر ایک طاق (odd) عدد ہو تو جواب یا power منفی ہو گی۔ طلبہ کو اس مہارت پر عبور حاصل کروانے کے لیے ضروری ہے کہ درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو کروایا جائے۔

قابلیت ۲

- polynomials کی جمع اور گھٹانے کے عمل کو دہرا سکیں۔
- polynomials کی ضرب کے عمل کو دہرا سکیں۔
- 3 ڈگری تک کے polynomials کو monomial اور binomial پر تقسیم کر سکیں۔

محرک: پچھلی جماعتوں میں طلبہ نے open اور closed بیانات کے درمیان فرق کرنا سیکھا تھا۔ ان کے ساتھ مل کر اعادہ کیجیے کہ open statement میں نامکمل معلومات ہوتی ہیں لہٰذا ان کے درست (true) غلط (false) ہونے کا تعین کرنے کے لیے مکمل معلومات درکار ہوتی ہیں جب کہ closed بیانات میں مکمل معلومات ہوتی جس کی بنا پر ہیں یہ درست ہوتے ہیں یا پھر غلط۔ الجبرا میں متغیرات (variables) ہوتے ہیں۔ جس کی وجہ سے عموماً بیانات open ہوتے ہیں۔ اس کے بعد طلبہ کو یاد دہانی کروائیے کہ polynomial ایک expression ہے جو متغیرات (variables)، coefficients اور ریاضیاتی عوامل (mathmatical operations) پر مشتمل ہوتا ہے۔ بعض صورتوں میں ہوسکتا ہے کہ polynomial ایک munoromial ہو یعنی ایسا expression جس میں صرف ایک term ہو جو ایک single numeral ، متغیر یا ایک (یا زائد) متغیرات کا حاصل ضرب (product) ہو یہ ایک binomial بھی ہوسکتا ہے جو دو (terms) پر مشتمل ایک expression ہے یا پھر trinomial جیسا کہ نام سے ظاہر ہے اس میں تین (terms) ہوتی ہیں۔ ایک polynomial کا درجہ (degree) کی تعیّن کرنے کے لیے expression میں موجود term کے سب سے بڑے قوت نما (highest exponent) کو معلوم کیا جاتا ہے مثال کے طور پر $2x^3 - 5x^4 + 3x^2$ میں 4 degree ہے۔ طلبہ سے کہیں کہ وہ like terms اور unlike terms کا فرق بتائیں۔ اس درجے پر طلبہ کو ان دونوں term کا فرق بیان کرنے کے قابل ہونا چاہیے کیونکہ انھوں نے polynomials کی جمع اور تفریق میں like اور unlike terms کا استعمال اور لاگو

integers. These rules apply to coefficients, leaving the variable part unchanged. Recall with the students how when two terms are multiplied, it results in a new term. Unlike addition or subtraction, two unlike terms can be multiplied with one another, that is $x \times y = xy$. Similarly, when two coefficients are multiplied, the base and the exponent remain the same. Similarly, when two powers having the same base are multiplied, then exponents are added. It should be pointed out that when multiplying an algebraic expression horizontally by another expression, each term of the first expression is multiplied by each term of the second expression. The result is then simplified by adding like terms. Inform the students that an easy way of doing it is by using the FOIL method. That is **F**irst (multiply the first terms), **O**uter (multiply the outer terms), **I**nside (multiply the inside terms) and **L**ast (multiply the last terms). In vertical multiplication, the longer is written on top while the shorter expression is written beneath it. Each term of the first expression is multiplied by each term of the second expression. The two products are then written in separate rows with similar terms, one beneath the other in separate columns. All like terms are then added and simplified.

Once the revision for previously learnt concepts is done, introduce to the students how division of polynomials by a monomial and a binomial is done. The division of polynomials is done using the quotient law of indices. To divide the polynomial with another polynomial, follow the steps:

- Arrange the dividend and the divisor in ascending/descending powers of the same variable.
- Divide the first term of the dividend by the first term of the divisor and write the quotient in the first position scheduled for the quotient.
- Multiply each term of the divisor by the quotient and subtract the product from the dividend.
- Bring the remaining part of the dividend to the lower level, in line with the dividend left from Step 1.
- Divide this dividend by the divisor as carried out in the second step. Continue the process until no further division can be carried out.

Competency 3:

- Differentiate between an arithmetic sequence and a geometric sequence
- Find terms of an arithmetic sequence using:
  - term to term rule
  - position to term rule
- Construct the formula for the general term (nth term) of an arithmetic sequence

کرنا سیکھا تھا۔ انھیں یاد دلایئے کہ polynomials کی جمع افقی (horizontally) یا عمودی (vertically) کی جا سکتی ہے۔ پھر عددی عوامل (number operations) کا اطلاق کرتے ہوئے integers کے sign role کی پیروی کی جاتی ہے۔ اسی طرح یہ rule صرف coefficients پر لاگو ہوتا ہے اور متغیر میں کوئی تبدیلی نہیں کی جاتی۔ اب طلبہ کو یاد دلایئے کہ جب دو term کو آپس میں ضرب دیا جاتا ہے تو نتیجے میں ایک نئی term حاصل ہوتی ہے، اسی طرح جمع یا تفریق کے برعکس دو متضاد terms کو ایک دوسرے سے ضرب کیا جا سکتا ہے یعنی $x \times y = xy$۔ اسی طرح جب دو coefficients کو ضرب دیا جاتا ہے تو base اور exponents ایک ہی رہتے ہیں۔ جب دو ایسی powers جن کا base ایک جیسا ہو آپس میں ضرب دی جائیں تو exponents جمع کیے جاتے ہیں۔ یہاں طلبہ کو یہ بات بھی سمجھایئے کہ جب ایک الجبرا کی expression کو دوسری الجبرا کی expression سے افقی طور پر ضرب دی جائے تو پہلی expression کی ہر term کو دوسری expression کی ہر term ضرب دی جاتی ہے۔ نتیجے میں حاصل ہونے والی like terms کو جمع کرکے سادہ simplified کیا جاتا ہے۔ طلبہ کو بتایئے کہ اس عمل کو انجام دینے کا سب سے آسان طریقہ FOIL کا ہے: F یعنی First (پہلی First term کو ضرب) O یعنی Outer (بیرونی outer term کی ضرب)، I یعنی inside (اندرونی inside term کی ضرب) L یعنی last (آخری last term) کی ضرب) عمودی ضرب میں سب سے لمبی expression کو سب سے اوپر اور سب سے چھوٹی term کو اس کے نیچے لکھا جاتا ہے پھر پہلی expression کی ہر term دوسری ہر expression کی term سے ضرب دی جاتی ہے۔ پھر نتیجے میں حاصل ہونے والی products کو الگ الگ rows میں لکھا جاتا ہے۔ like term کو ایک دوسرے کے نیچے الگ الگ کالموں میں لکھا جاتا ہے آخر میں تمام terms کو جمع کرکے سادہ بنا لیا جاتا ہے۔

جب طلبہ گزشتہ سیکھے گئے تصورات کا اعادہ کر چکیں تو انھیں سمجھایئے کہ monomial اور binomial کے ذریعے polynomials کی تقسیم کیسے کی جاتی ہے۔ یہاں طلبہ کو یہ بات بتایئے کہ تقسیم کے اس عمل میں ہم اشاریہ کے تقسیم کے قانون (quotient law of indices) کا استعمال کرتے ہیں۔ ایک polynomials کو دوسرے polynomials سے تقسیم کرنے کے لیے درج ذیل پر عمل کریں۔

- dividend اور divisor کو ایک ہی variable کی صعودی/نزولی powers میں ترتیب دیں۔
- dividend کی پہلی term کو divisor کی پہلی term سے تقسیم کریں۔
- divisor کی ہر term کو Quotient سے ضرب دیں اور حاصل ضرب (product) کو dividend سے منہا یا تفریق کریں۔
- dividend کا باقی حصہ نیچے لائیں اور اسے step 1 کے باقی حصے کے ساتھ ترتیب میں رکھیں۔
- اس dividend کو divisor سے دوبارہ تقسیم کریں۔ تقسیم کا عمل اس وقت تک جاری رکھیں۔

جب تک کہ مزید تقسیم کرنا ممکن نہ رہے

قابلیت ۳

- ریاضیاتی تسلسل (airthmatic sequence) اور ہندسی تسلسل (Geometric sequence) میں فرق کرسکیں۔
- ذیل کا استعمال کرتے ہوئے ریاضیاتی تسلسل کی terms کو معلوم کرنے کے لیے درج ذیل کا استعمال کرسکیں۔
  - term to term rule
  - position to term rule
- ریاضیاتی تسلسل کی general term یا (nth term) کے لیے فارمولا بنا سکیں۔

Stimulus: Students are familiar with number patterns. They know and understand increasing, decreasing and repeating patterns. Until Grade 7, students recognised and were able to complete patterns using term-to-term rule and position-to-term rule. In this grade, they will be able to successfully construct formulas for the general term.

Start the lesson by writing the following number sequence on the board: 5, 10, 15, 20. Ask the students to further extend the terms. Once they do, tell them that we notice a constant difference between each term. The terms differ by +5, which is common between all terms. Such a sequence is an arithmetic sequence. Explain to the students that an arithmetic sequence only deals with addition and subtraction. It is described as a list of numbers where each term differs from the previous term by a constant quantity, that is there is a constant difference between each successive term. Now write the following sequence on the board: 1, 2, 4, 8, 16, …. Now ask the students if they can figure out the next term of the sequence. Inform them that here, 2 is multiplied in the previous term to get the next term. Such a sequence is a geometric sequence. Explain to the students that geometric sequence is a sequence where each term, after the first, is obtained by multiplying the preceding term by a constant number. That is, there is a constant ratio between two successive terms. Geometric sequences deal with multiplication and division.

Once the students can easily differentiate between arithmetic and geometric terms, it would be easier for them to construct the formula for the *n*th term in an arithmetic sequence. Introduce the students to the following formula: $T_n = T_1 + (n-1)d$; where T_1 is the first term and d is the difference between two terms. This formula can be used if the first term and the common difference between any two successive terms is known. Consider the following sequence: 3, 7, 11, 15. To extend the terms and find any random term from the sequence, we first need a formula for the *n*th term. Ask the students what the first term is that is 3. Now ask if they can figure out the difference between two successive terms. They may choose any two terms from the sequence; the difference will remain 3. Now to find, let's say 18^{th} term, we substitute all the value in the *n*th formula:

$$T_n = T_1 + (n-1)d$$

$$T_n = 3 + (n-1)3$$

$$T_n = 3 + 4n - 4$$

$$T_n = 4n - 1$$

Now substituting 18 in the *n*th place to find the 18^{th} term:

$$T_{18} = 4(18) - 1$$

$$= 72 - 1$$

$$= 71$$

محرک : طلبہ number patterns کو پہلے سے جانتے ہیں وہ بڑھتے ہوئے (increasing patterns) گھٹتے ہوئے (decreasing patterns) اور دہرائے جانے والے (Repeating patterns) سے بھی واقف ہیں۔ ساتویں جماعت میں طلبہ نے term to term rule اور position to term rule کا استعمال کر کے patterns کو مکمل کرنا پہچاننا سیکھا تھا اب وہ اس جماعت میں General term کے لیے فارمولا بنانے کے قابل ہو جائیں گے۔

سبق کا آغاز اس عددی ترتیب کو بورڈ پر لکھ کر کیجیے: 5، 10، 15، 20 طلبہ سے کہیے کہ وہ اس ترتیب (sequence) کو مزید آگے بڑھائیں۔ جب وہ ایسا کریں تو انھیں بتائیے کہ ہم ہر عدد کے درمیان ایک مستقل فرق کو دیکھتے ہیں یعنی ہر عدد میں 5+ کا فرق ہے جو تمام اعداد میں مشترک ہے ایسی ترتیب کو حسابی ترتیب (arithmetic sequence) کہا جاتا ہے طلبہ کو سمجھائیے کہ حسابی ترتیب صرف جمع اور تفریق سے متعلق ہوتی ہے یہ اعداد کی ایک ایسی فہرست ہے جس میں ہر عدد اپنے پچھلے عدد سے ایک مستقل مقدار میں مختلف ہوتا ہے یعنی ہر اگلے عدد میں ایک جیسا فرق ہوتا ہے۔ اب بورڈ پر درج ذیل ترتیب لکھیے: 1، 2، 4، 8، 16، ... اب طلبہ سے پوچھیے کہ کیا وہ اس ترتیب کا اگلا عدد (term) بتا سکتے ہیں انھیں وضاحت سے بتائیے کہ یہاں پر پچھلے عدد (term) کو 2 سے ضرب دے کر اگلا عدد (term) حاصل کیا گیا ہے ایسی ترتیب کو ہندسی ترتیب (geometric sequence) کہا جاتا ہے طلبہ کو واضح طور پر سمجھائیے کہ ہندسی ترتیب میں پہلا عدد (term) چھوڑ کر ہر اگلا عدد (term) کسی مستقل عدد سے ضرب دے کر حاصل کیا جاتا ہے یعنی ہر دو مسلسل اعداد (successive term) ایک مستقل نسبت (ratio) میں ہوتے ہیں ہندسی ترتیب (geometric sequence) ضرب اور تقسیم سے متعلق ہوتی ہے۔

ایک بار طلبہ جب airthmetic term اور geometric term کے فرق کو اچھی طرح سمجھ لیں تو ان کے لیے حسابی ترتیب میں nth term کے لیے فارمولا بنانا آسان ہو جائے گا اب طلبہ کو درج ذیل فارمولے سے متعارف کروائیے: $T_n = T_1 + (n-1)d$ جہاں T_1 پہلا عدد (term) ہے اور d دو مسلسل اعداد (term) کے درمیان فرق ہے یہ فارمولا اس وقت استعمال کیا جا سکتا ہے جب پہلا عدد (term) اور دو مسلسل اعداد کے درمیان فرق معلوم ہو اب درج ذیل ترتیب پر غور کیجیے: 3، 7، 11، 15 اس ترتیب کو آگے بڑھاتے ہوئے اور اس میں سے کوئی بھی عدد (random term) معلوم کرنے کے لیے ہمیں پہلے nth term کا فارمولا درکار ہے اب طلبہ سے پوچھیے کہ پہلا عدد کیا ہے؟ ان کا جواب ہو گا: 3 اب ان سے پوچھیے کہ کیا وہ دو مسلسل اعداد کے درمیان فرق معلوم کر سکتے ہیں؟ وہ ترتیب (sequence) میں سے کوئی بھی دو عدد منتخب کریں فرق ہمیشہ 4 ہی ہو گا اب اگر ہمیں 18 واں عدد (18th term) معلوم کرنا ہو تو ہم تمام values کو nth فارمولے میں رکھیں گے یعنی:

$$T_n = T_1 + (n-1)d$$

$$T_n = 3 + (n-1)3$$

$$T_n = 3 + 4n - 4$$

$$T_n = 4n - 1$$

اب اگر ہمیں 18 واں عدد معلوم کرنا ہو تو ہم n کی جگہ پر 18 کو رکھیں گے: یعنی

$$T_{18} = 4(18) - 1$$

$$= 72 - 1$$

$$= 71$$

Students often make mistakes substituting the values in the formula, therefore use guided practice for step-by-step substitution. Also explain the logic behind (n-1) that is the jumps between numbers from the first term to the nth term are one less than the term number. Use examples and exercises from the textbook to further strengthen the students' concepts. Also, reinforce the students' knowledge using independent worksheets.

اکثر طلبہ فارمولے میں values کو رکھتے ہوئے غلطیاں کرتے ہیں اس لیے دی گئی ہدایات کے مطابق مشق کو مرحلہ وار کروایئے (n –1) کی منطق (logic) بھی وضاحت سے سمجھایئے یعنی پہلے عدد (first term) سے لے کر nth term تک جتنی jumps ہیں وہ ہمیشہ (term number) سے ایک کم ہوتی ہیں۔ اس تصور میں پختگی کے لیے طلبہ کو درسی کتاب میں دی گئیں مثالوں اور مشقوں کو زیادہ سے زیادہ کروایئے۔ اور اعادے کے لیے الگ سے ورک شیٹیں مہیا کیجیے تا کہ وہ اپنی معلومات کو تقویت دے سکیں۔

Unit 6 Algebraic Expressions: Expansion and Factorisation

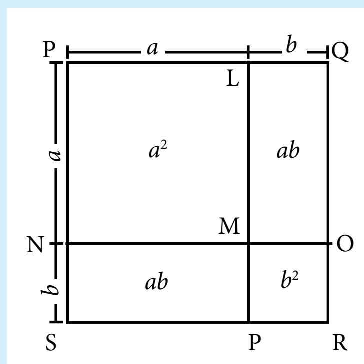
Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Recognise the following algebraic identities and use them to expand expressions:
  - $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
  - $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
  - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- Apply algebraic identities to solve problems like $(103)^2$, $(1.03)^2$, $(99)^2$, 101×99

Stimulus: Students have explored algebraic identities. Now they will use those identities to expand and factorise algebraic expressions. Write the following statement on the board: $2x + 6 = 10$. Ask the students how they can make this statement true. After they have answered, substitute the value of x with 2 and solve the equation. Explain to the students that the statement is only true when we substitute x with 2 and not any other value. Such a statement is called an equation because both sides of the equality signs are the same, only if $x = 5$. Inform the students that since $x = 5$ is a condition, this is a conditional statement. Now write the following equation on the board: $2x + 8x = 10x$. Ask the students if the equation is true. Now ask them if x is substituted by 4, will the equation remain true? Help them substitute x with 4 and solve the equation. Like the previous equation, this statement is also true for all values of x and is not limited to any condition. Such an equation is called an algebraic identity. Algebraic identities are used to make calculations easier. There are three identities.

Move on to explaining identities one by one using the textbook. The identities can be proven geometrically as well. The area of the square is $a \times a = a^2$. Draw a large square on the board and split it into a larger square, a smaller square and two rectangles as shown. To prove it geometrically, explain the following to the students:



The area of PQRS (with sides a cm and b cm) = $(a + b)^2$ cm².

The area of the larger square PLMN = a^2 cm².

The area of the smaller square OMPR = b^2 cm².

The area of each rectangle = ab cm².

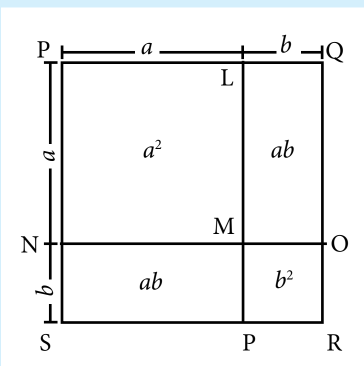
The area of square PQRS = area of PLMN + area of OMPR + area of 2 rectangles = $a^2 + b^2 + ab + ab$

Area of square PQRS = $(a^2 + b^2 + 2ab)$ cm² = $(a + b)^2$ cm²

قابلیت ا

- درج ذیل algebraic identities کو شناخت کر سکیں اور ان کا استعمال کرتے ہوئے expression کو expand کر سکیں۔
  - $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
  - $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
  - $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- سوال حل کرنے کے لیے algebraic identities کا اطلاق کر سکیں جیسے 101×99, $(99)^2$, $(1.03)^2$, $(103)^2$

محرک: طلبہ algebraic identities کو پہلے سے جانتے ہیں اور اب وہ ان کو استعمال کرتے ہوئے algebraic expression کو expand اور factorise کر سکیں گے۔ اب بورڈ پر یہ ریاضیاتی بیان statement لکھیے: $2x + 6 = 10$ طلبہ سے پوچھیے کہ وہ اس کی تصدیق کیسے کریں گے؟ ان کا جواب سننے کے بعد x کی value 2 لکھ کر اس equation کو حل کیجیے طلبہ کو یہ بات بھی زور دیتے ہوئے سمجھائیے کہ اس بیان کو درست ثابت کرنے کے لیے ضروری ہے x کی جگہ 2 سے تبدیل کر دی جائے ایسا الجبرائی بیان equation کہلاتا ہے کیونکہ برابر یا مساوی کی علامت = کے دونوں جانب ایک جیسی ہیں اگر $x = 5$ یہ ایک condition ہے یعنی یہ ایک conditional statement ہے۔ اب یہ statement بورڈ پر لکھیے: $2x + 8x = 10x$ کے خیال میں کیا یہ statement درست ہے؟ پھر ان سے پوچھیے کہ اگر x کی جگہ کو ہم 4 سے تبدیل کر دیں تو کیا یہ جملہ تب بھی درست (true) رہے گی؟ طلبہ سے کہیں کہ x کی جگہ 4 لکھیں اور اس جملے کو حل کریں پچھلے جملے کی طرح یہ statement بھی true ہے فرق صرف یہ ہے کہ یہ statement کی ہر value کے لیے true رہے گا کیونکہ یہاں کوئی condition نہیں لگائی گئی۔ ایسی equation کو algebraic identity کہتے ہیں۔ algebraic identities کی مدد سے سوالوں کو بہ آسانی حل کیا جا سکتا ہے۔ یہ identities تین طرح کی ہیں۔



اب درسی کتاب سے یکے بعد دیگرے ان identities کی وضاحت کیجیے۔ ان کو identities کو ہندسیماتی (geomratically) طور پر بھی prove کیا جا سکتا ہے۔ ایک مربع کا رقبہ (area) a $a \times a = a^2$ سے بورڈ پر ایک بڑا مربع (square) بنا کر اسے ایک بڑے مربع، ایک چھوٹے مربع اور دو ایک جیسے سائز کے مستطیلوں (rectangles) میں تقسیم کر دیجیے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اب اسے ہندسیاتی (geomratically) طور پر prove کرنے کے لیے ذیل کے طریقے کا استعمال کرتے ہوئے طلبہ کو وضاحت کے ساتھ سمجھائیے۔

PQRS کا رقبہ (sides کے ساتھ acm اور bcm) = $a + b)^2\ \mathrm{cm}^2)$

بڑے مربع کا رقبہ PLMN = $a^2\ \mathrm{cm}^2$

چھوٹے مربع کا رقبہ OMPR = $b^2\ \mathrm{cm}^2$

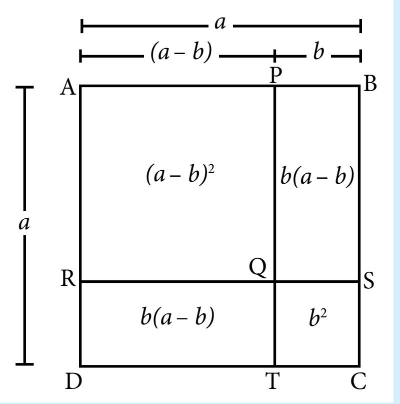
ہر مستطیل کا رقبہ = $ab\ \mathrm{cm}^2$

مربع PQRS کا رقبہ = PLMN کا رقبہ + OMPR کا رقبہ + 2 مستطیلوں کا رقبہ = $a^2 + b^2 + ab + ab$

مربع PQRS کا رقبہ = $\mathrm{cm}^2\ (a^2 + b^2 + 2ab) = \mathrm{cm}^2\ a + b)^2)$

The results obtained in algebra tally with the results obtained in geometry and give us the first algebraic identity, square of the sum of two terms: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Next, move on to the second identity, square of difference of two terms. This identity can be proved geometrically as well. Ask the students to assume that the length of a square ABCD is a cm.



In the square ABCD, AB = a, PB = b

So, AB – PB = AP = $a - b$:

The area of the larger square ABCD = a^2 cm².

The area of the smaller square APQR = $(a - b)^2$ cm².

The area of each rectangle = $b(a - b)$ cm².

The area of the small square QSCT = b^2 cm².

The area of the square APQR = area of the square ABCD – area of 2 rectangles – area of the small square QSCT.

$(a - b)^2 = a^2 - b(a - b) - b(a - b) - b^2$

$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

The results obtained in algebra tally with the results obtained in geometry and give us the second algebraic identity, square of difference of two terms: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

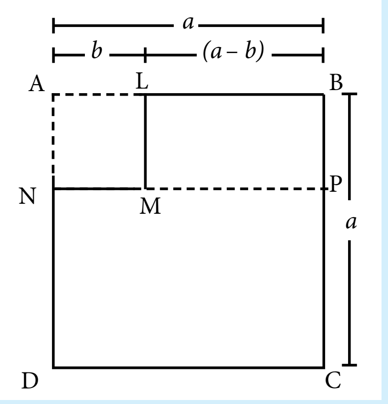
Check up on the students to see if they are following your lead and can easily understand how algebraic identities can be proven and attained geometrically. The last identity is the product of sum and difference of two terms. To prove this identity, a square is split as shown:

Let the length of a square ABCD be equal to a cm.

In the square ABCD, AB = a, AL = b.

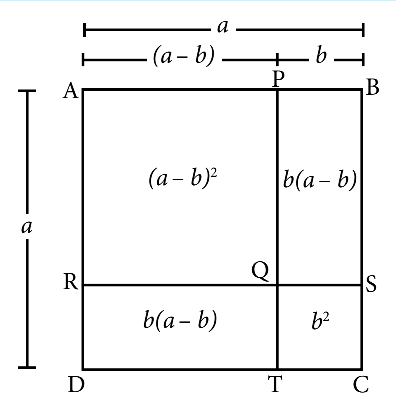
∴ AB – AL = LB = $a - b$.

To prove it geometrically, remove the small square ALMN as shown.



الجبرا سے حاصل ہونے والے نتیجے کو geometry سے حاصل ہونے والے نتیجے سے ملا کر دیکھیے۔ پہلی algebraic identity، squares کی دو term کا مجموعہ: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

اب = دوسری identity پر غور کیجیے۔ square کی دو term کا فرق ۔۔۔۔۔ identity بھی geomatrically ثابت (prove) کی جاسکتی ہے۔ طلبہ سے کہیں کہ وہ یہ فرض کریں کہ مربع (square) لمبائی a cm ہے۔



مربع ABCD، a = AB، b = PB

لہٰذا $a - b$ = AP = AB − PB

بڑا مربع کا رقبہ a^2 cm² = ABCD

چھوٹے مربع کا رقبہ $(a - b)^2$ cm² = APQR

مستطیل کا رقبہ = $b(a - b)$ cm²

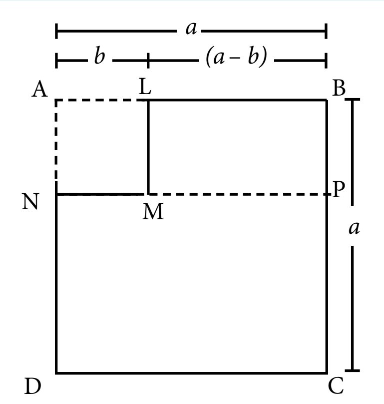
چھوٹے مربع کا رقبہ b^2 cm² = QSCT

مربع APQR کا رقبہ = مربع ABCD کا رقبہ − 2 مستطیلوں کا رقبہ − چھوٹے مربع QSCT کا رقبہ

$$(a - b)^2 = a^2 - b(a - b) - b(a - b) - b^2$$
$$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

الجبرا سے حاصل ہونے والے نتیجے اور جیومیٹری سے ملنے والے نتائج کو آپس میں tally کرنے سے ہمیں معلوم ہوا کہ دوسری identity مربعے کی دو terms کا فرق: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

طلبہ کے کام کا جائزہ لیجیے تا کہ پتہ چل سکے کہ انھوں نے کس حد تک آپ کی بات کو سمجھا ہے کہ Algebraic identities کو geomatrically کیسے prove اور حاصل کیا جاتا ہے اور طلبہ کو آخری identity جو دو terms کے مجموعے (sum) اور difference حاصل ضرب (product) کی شناخت ہے اس کو prove کرنے کے لیے ایک مربع کو دی گئی مشکل کے مطابق تقسیم کیا جاتا ہے۔



مربع ABCD کی لمبائی a cm میں

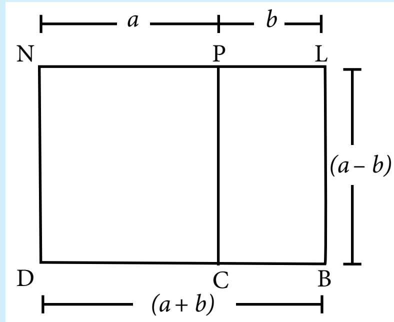
مربع ABCD میں a = AB، b = AL

$\therefore$ AB – AL = LB = $a - b$

اسے geomatrically ثابت (prove) کرنے کے لیے چھوٹے مربع ALMN کو شکل کے مطابق ختم کر دیجیے۔

Place the remaining rectangle LBPM beside the rectangle NPCD as shown. Observe the new figure:

In the bigger rectangle NLBD, NL = BD = $(a + b)$ and LB = ND = $(a - b)$.



The area of NLBD = $(a + b)(a - b)$ cm^2.

The area of rectangle NPCD = $a(a - b)$ cm^2.

The area of rectangle PLBC = $b(a - b)$ cm^2.

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a(a - b) + b(a - b)\\ &= a^2 - ab + ba - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

The results obtained in algebra tally with the results obtained in geometry and give us the third algebraic identity, square of sum and difference of two terms:
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

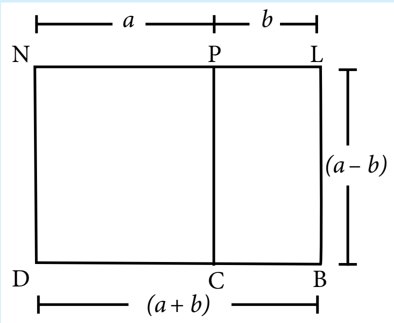
Move on to using these identities to solve problems. Emphasise to the students that identities are not only used for algebra, but for numbers and variables. When applying identity to any number or expression, signs should be noticed. For example,
to find the square of $3b + 3c$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ identity. Similarly, when using identities on numbers, it is always best to use smaller numbers.
For example, to find the value of $(294)^2$, $(300\text{-}6)^2$ should be solved instead of $(200 + 94)^2$ as 200 and 94 are both bigger numbers and would require more calculation. Use examples and exercises from the textbook to further solidify the students' concepts.

At times, these identities are manipulated to help solve problems. This is done when the values of terms are required to be substituted. Such a process leads to formulas such as:

- $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$,
- $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$,
- $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$,
- $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$,
- $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$, and
- $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$.

باقی رہ جانے والے مستطیل LBMP کو مستطیل NPCD کے ساتھ رکھ دیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اب اس نئی شکل کا مشاہدہ کیجیے:



بڑے مستطیل NLBD میں $NL = BD = (a + b)$ اور $LB = ND = a - b$

NLBD کا رقبہ = $(a - b)\ (a + b)$ مربع سینٹی میٹر

مستطیل NDCD کا رقبہ = $a(a - b)$ مربع سینٹی میٹر

مستطیل PLBC کا رقبہ = $b(a - b)$ مربع سینٹی میٹر

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$$
$$= a^2 - ab + ba - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$

الجبرا کے حاصل شدہ نتائج کو ہندسی (gemtrically) طریقے سے حاصل ہونے والے نتائج سے (tally) کیجیے۔

یہ ہمیں تیسری algebraic identity فراہم کرتے ہیں۔ square کی دو terms کا مجموعہ (sum) اور فرق (difference) :
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

اب ان identities کو استعمال کرتے ہوئے سوالوں کو حل کرائیے اور اس دوران طلبہ پر زور دیجیے کہ identities صرف الجبرا میں ہی نہیں بلکہ عددی اور متغیروں (variables) میں بھی استعمال ہوتی ہیں۔ جب کسی عدد یا expression پر identites کا اطلاق کیا جائے تو علامات (signs) کا خاص طور خیال رکھا جاتا ہے۔مثال کے طور پر

3b + 3c کے مربع کو معلوم کرنے کے لیے ہم $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ اسی طرح عددوں پر identities کو لاگو کرتے ہوئے چھوٹے عدد کا استعمال کرنا بہتر ہوتا ہے

مثال کے طور پر $(300-6)^2$, $(294)^2$ کو حل کرنے کے لیے $(200 + 94)^2$ کے بہ جائے $(300 - 5)^2$ کو حل کیا جائے۔ کیونکہ 200 اور 94 دونوں بڑے اعداد ہیں اور ان کے لیے بہت زیادہ (calculation) کرنا پڑے گی۔ طلبہ کو اس قابلیت میں مہارت دینے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو استعمال کیجیے۔

بعض صورتوں میں ان identities کو سوالوں کے مطابق تبدیل کرکے بھی حل کیا جاتا ہے یہ اس وقت کیا جاتا ہے جب ہمیں دو (terms) کی value کو تبدیل کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ ایسا عمل ہمیں درج ذیل فارمولوں تک لے جاتا ہے:

- $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$,
- $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$,
- $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$,
- $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$,
- $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$, and
- $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$.

Competency 2:

- Factorise the following types of expressions:
    - $ka + kb + kc$
    - $ac + ad + bc + bd$
    - $a^2 \pm 2ab + b^2$
    - $a^2 - b^2$
    - $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2$
- Manipulate algebraic expressions:
    - $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
    - $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Stimulus: Students are familiar with what factors are. Recall the definition of factors, which are numbers that divide another number completely, without leaving any remainders. Now, ask the students to find the factors of 64. Inform them that similar to numbers, algebraic terms also have factors. Ask them if they can figure out the factors of an algebraic term, for example, xyz. Once they reply, move on to explain that xyz is essentially $x \times y \times z$ and so has multiple factors, x, y, z, xy, yz, xz, and xyz. Use the following as examples to show factors of algebraic expression:

- The factors of $(a^2 - b^2)$ are $(a - b)$, $(a + b)$, and $(a^2 - b^2)$.
- The factors of $(a^2 - 2ab + b^2)$ are $(a - b)$, $(a - b)$, and $(a^2 - 2ab + b^2)$.
- The factors of $3a^2 - 9a + 12ab$ are 3, a, $3a$, $(a - 3 + 4b)$, $3(a - 3 + 4b)$, $a(a - 3 + 4b)$, and $3a\,(a - 3 + 4b)$.

In generic terms, if an expression containing two or more terms possesses a common factor, then that factor is a factor of each term. So, for the expression, AB + BC, A is a common factor in both terms so, the factorised expression would be AB + BC = A (B + C). Similarly, for the expression $ax + bx - cx$, x is a common factor and so it is isolated first.
So, $ax + bx - cx = (a$ times $x + b$ times $x -$ c times $x) = x\,(a + b - c)$.

Further explain to the students that in case of different numbers, common factors are considered. For example, the common factor in $8cx + 10cy + 12cz$ is 2c as 8, 10 and 12 are common factors of 2. So, the factorised expression would be $2c(4x + 5y + 6z)$. Point out to the students that numbers and variables can both be considered common factors. Move on to explaining another method of factorising algebraic expression – by regrouping them. Regrouping is done when there are no common factors except 1. Therefore, we break down an expression into parts. For example, the expression $5ab - 3a + 10b - 6$, the first and second terms are grouped together and thus can be

قابلیت ٢

expression کی درج ذیل اقسام کو factorise کرنا سیکھ سکیں۔

- $ka + kb + kc$
- $ac + ad + bc + bd$
- $a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2$
- $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2$

algebraic expressions پر مزید عبور حاصل کر سکیں۔

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

محرک: طلبہ پہلے سے factors کو جانتے ہیں آپ انھیں یاد دلایئے کہ یہ وہ اعداد (numbers) ہیں جو کسی دوسرے عدد کو مکمل طور پر تقسیم کرتے ہیں اور کوئی remainder بھی نہیں بچتا۔ اب طلبہ سے کہیں کہ وہ 64 کے factors معلوم کریں۔ انھیں بتایئے کہ اعداد کی طرح algebraic terms کے بھی factors ہوتے ہیں مثال کے طور پر: xyz کیا وہ اس algebraic term کے factors کو معلوم کر سکتے ہیں۔ جب وہ جواب دے چکیں۔ تو آپ وضاحت سے بتایئے کہ xyz بنیادی طور پر $x \times y \times z$ ہے اور

لہٰذا اس کے multiple factors ہو سکتے ہیں یعنی x, y, z, xy, yz, xz اور xyz algebraic expression کے factors کو دکھانے کے لیے درج ذیل مثالوں کو استعمال کیجیے۔

- $(a^2 - b^2)$ کے factors ہیں: $(a - b), (a + b)$ اور $(a^2 - b^2)$
- $(a^2 - 2ab + b^2)$ کے factors ہیں: $(a - b), (a - b)$ اور $(a^2 - 2ab + b^2)$
- $3a^2 - 9a + 12ab$ کے factors ہیں: $3, a, 3a, (a - 3 + 4b), 3(a - 3 + 4b), a(a - 3 + 4b)$ اور $3a\ (a - 3 + 4b)$

کسی عام algebraic term اگر ایک expression میں ایک، دو یا زائد terms ہوں اور ان کا کوئی common factor بھی ہو تو تب وہ ہر term کا factor ہوتا ہے۔ لہٰذا expression AB + BC کے لیے A دونوں term کا ایک common factor ہے۔

لہٰذا expression کے ممکنہ factors A (B+C) AB + BC = ہوں گے۔ بالکل اسی طرح expression $ax + bx - cx$ کے لیے x ایک common factor ہے لہٰذا پہلے اسے الگ کیا جاتا ہے اس لیے $ax + bx - cx = (a$ times $x + b$ times $x - c$ times $x) = x\ (a + b - c)$

اب طلبہ کو بتایئے کہ اعداد numbers مختلف ہونے کی صورت میں common factors پر غور کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر 8cx + 10cy + 12cz is 2c as 8, 10 میں common factor 2c ہے کیونکہ 8، 10، 12 میں 2 common factor ہے لہٰذا 2c factorised expression (4x + 5y + 6z) ہو گی۔ طلبہ کو بتایئے کہ common factor کے لیے اعداد اور متغیر (variables) دونوں کو زیر غور رکھا جاتا ہے۔ اب انھیں algebraic expression کو factorise کرنے کا ایک اور طریقہ regrouping کرنا سمجھایئے۔
جب کسی algebraic expression میں والے 1 کے علاوہ کوئی اور common factor نہ ہو تو ہم expression کو حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تاکہ regrouping کی جا سکے مثال کے طور پر 6 – 5ab – 3a +10b expression میں پہلی اور دوسری terms کو group کی

factorised as: a $(5b - 3)$ as a is the common term. Now, third and fourth terms are grouped together, and the common factor is 2. Therefore, $10b - 6$ is factorised as $2(5b - 3)$. The common factor in both groups is therefore $(5b - 3)$. So, the factors of $5ab - 3a + 10b - 6$ are $(5b - 3)(a + 2)$. Solve another example to solidify the concept for the students.

$$\underline{8xy - 5x} + \underline{8y - 5}$$

(group together the first two and the last two terms)

$$x(8y - 5) + 8y - 5$$

$$x(8y - 5) + 1(8y - 5)$$

$$(x + 1)(8y - 5)$$

Use different examples and exercises from the textbook to help students practice and ace the concepts. The last method of factorising algebraic expressions is by using identities. Revise the identities of students and write them on the board:

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
  $= a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$
  $= a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Explain to the students that these identities are very useful in finding the factors of variety of algebraic expressions which are perfect squares or the product of the sum and difference of two variables. For example, to factorise $x^2 + 4x + 4$, it is observed that the expression is the square of the expression $(x + 2)$. The first term of the expression is the square of x while the second term is the square of 2. The middle term is $2 \times x \times 2 = 4x$. So, factorisation becomes easy and evident, that is $(x + 2)(x + 2)$. Inform the students that identities make it easier to factorise expressions and avoid large calculations only if the correct identity is used or applied.

شکل میں لکھتے ہیں اور پھر ان کو factorised کرنے پر حاصل ہوتا ہے (3- a (5b اس میں *a* ایک common term ہے۔ اب تیسری اور چوتھی term کو grouped کی شکل میں اکٹھا کریں تو ان میں 2 ایک common factor ہے لہٰذا 6 – 10b کو (3- 2(5b کے طور پر factorised کیا جاتا ہے اور (3 – 5b) کو common factor کے طور پر نکال لیں تو 6 – 5ab – 3a +10b کے factors ہوں گے (a+2)(3 – 5b)۔ طلبہ کو اس تصور میں پختہ کرنے کے لیے مزید مثالوں کو حل کروایئے:

$$\underline{8xy - 5x} + \underline{8y - 5}$$

(پہلی دو اور آخری دو term کو group کی شکل میں لکھیے)

$$x(8y - 5) + 8y - 5$$

$$x(8y - 5) + 1(8y - 5)$$

$$(x + 1)(8y - 5)$$

درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو کروایئے تا کہ طلبہ کو اس قابلیت پر عبور حاصل ہو سکے۔ algebraic expression کو factorise کرنے کا درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو کروایئے تا کہ طلبہ کو اس قابلیت پر عبور حاصل ہو سکے۔ algebrac express کو factrise کرنے کا آخری طریقہ identities کو استعمال کرنا ہے اس کے لیے identities کا دہرایا جانا ضروری ہے لہٰذا انھیں بورڈ پر لکھ دیجیے۔

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
  $= a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$
  $= a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

طلبہ کو وضاحت کے ساتھ سمجھایئے کہ یہ algebrac activities بہت کار آمد ہیں خصوصاً جب مختلف algebraic express کے factors کو معلوم کرنا ہو جو perfect square ہوں یا دو متغیرات (variables) کے مجموعے (sum) اور تفریق کے حاصل ضرب (product) پر مشتمل ہوں مثال کے طور پر $x^2 + 4x + 4$ کو factorise کرنے کے لیے ہم غور کرنے پر جان سکتے ہیں کہ یہ $(x + 2)$ کا square ہے جس کی پہلی term x کا square ہے جبکہ دوسری term 2 کا square ہے اور درمیانی یا middle term۔ $2 \times x \times 2 = 4x$ ہے اس لیے اسے factorised کرنا آسان اور واضح ہے یعنی (x+2) (x+2) کو بتایئے کہ identities express کو factorised کرنا آسان بناتی ہیں اور بڑے حساب calculate سے بچاتی ہیں بشرطیکہ ان کو درست طریقے اور صحیح طرح سے لاگو کیا جائے۔

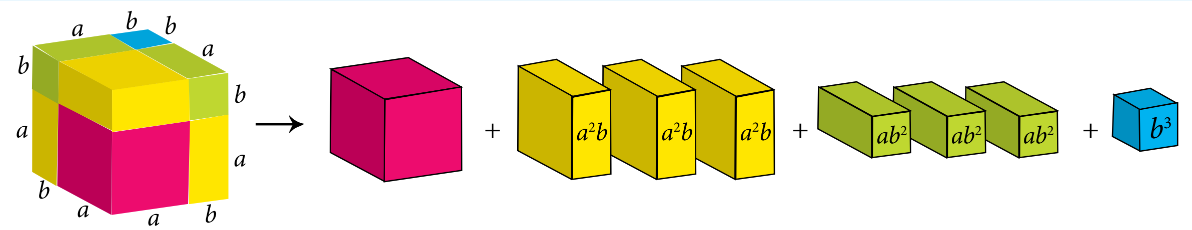
Competency 3:

Manipulate algebraic expressions:

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Stimulus: Students have learnt algebraic identities involving squares of sum of two terms, square of difference of two terms, and the square of sum and difference of two terms. Here, they will learn to cube the sum of two terms and the cube of difference of two terms. The binomial cube identities are derived exactly as the previous binomial square identities.

The identity for $(a + b)^2$ and $(a - b)^2$ was obtained by multiplying $(a + b)$ by $(a + b)$ and multiplying $(a - b)$ by $(a - b)$, respectively. The identity for $(a + b)^3$ and $(a - b)^3$ can also be obtained in a similar manner, which is: $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$ and $a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$.
Use the textbook to explain the expansion of the expression to the students. Geometrically, the identities can be proven using a cube that has an edge measuring $(a + b)$ cm and has volume $(a + b)^3$ cm^3. This cube, with volume $(a + b)^3$ cm^3, can be broken into pieces which represent the terms in the expansion of $(a + b)^3$.



$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Move on to using these identities to solve problems. Emphasise to the students that the same rules that apply for square identities apply to cubic identities. When using identities on numbers, it is always best to use smaller numbers. For example, to find the value of $(1.05)^3$, $(1 + 0.05)^3$ should be evaluated as instead of $(2 - 0.95)^3$ as 2 and 0.95 are both bigger numbers and require more calculation. Use examples and exercises from the textbook to further solidify the students' concepts.

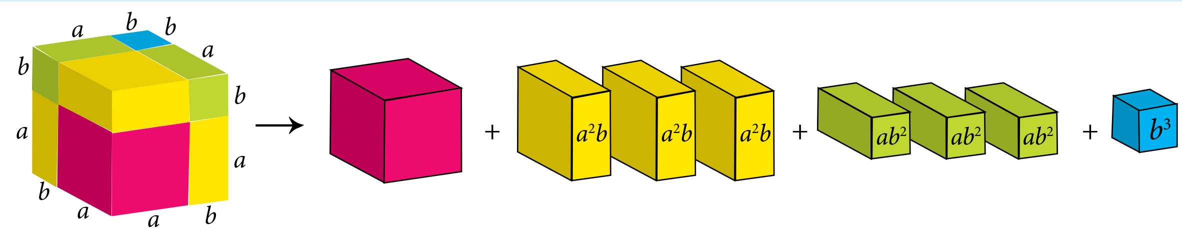
قابلیت ۳:

algebrac express کو manupulates کر سکیں۔

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

محرک: اب طلبہ نے algebrac identities کو شناخت کرنا سیکھا ہے جس میں دو term کے مجموعے (sum) کے squares دو term کے فرق کا square اور دو terms کے مجموعے (sum) اور فرق کا حاصل ضرب شامل ہے یہاں وہ دو terms کے مجموعے کو cube کرنا اور دو terms کے فرق کو cube کرنا سیکھیں گے۔ bimomial cube کی identities بالکل اسی طرح اخذ کی جاتی ہیں جس طرح پہلے bimomial square کی گئیں تھیں۔

$(a+b)^2$ اور $(a-b)^2$ ان identities کو بالترتیب (a+b) کو (a+b) سے ضرب اور (a-b) کو (a-b) سے ضرب دے کر حاصل کیا گیا تھا اور یہی عمل دہراتے ہوئے $(a+b)^3$ اور $(a-b)^3$ کی identities بھی حاصل کی جاسکتی ہے یعنی $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$ اور $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$ درسی کتاب کی مدد سے طلبہ کو expression کی expansion کو وضاحت سے سمجھانے کے لیے اس identity کو Geomatricaly طور پر prove کرنے کے لیے ایک مکعب (cube) کو لیجیے جس کے ہر کنارے (edge) کی لمبائی (a+b) سینٹی میٹر ہے اور اس کا حجم $(a+b)^3$ ہے۔ اس cube کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کیجیے جو $(a+b)^3$ کی expension میں terms کو represent کرتا ہے۔



$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

اب ان identities کو سوالوں کو حل کرنے کے لیے استعمال کیجیے۔ طلبہ کو یہ نکتہ واضح طور پر سمجھائیے کہ جس طرح مربع square کی identities پر قواعد (rule) لاگو ہوتے ہیں بالکل ایسے ہی قواعد (rule) cube کی identities پر بھی لاگو ہوتے ہیں۔ جب identities کا استعمال اعداد پر تو ہمیشہ چھوٹے اعداد کا استعمال کرنا موزوں رہتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر ہمیں $(1.05)^3$ کی value معلوم کرنی ہو تو اسے $(1+0.05)^3$ کے طور پر حل کرنا زیادہ آسان ہوگا بہ نسبت $(2 - 0.95)^3$ کے کیونکہ 2 اور 0.95 دونوں ہی بڑے اعداد ہیں اور انھیں استعمال کرنے سے بہت زیادہ calculation کرنی پڑے گی۔ طلبہ کو اس مہارت میں طاق کرنے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو کروائیے۔

Unit 7

Linear Equations and Linear Inequalities

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Recognise the gradient of a straight line. Recall the equation of horizontal and vertical lines, that is $y = c$ and $x = a$
- Find the value of 'y' when 'x' is given from the equation and vice versa
- Plot graphs of linear equations in two variables, that is $y = mx$ and $y = mx + c$
- Interpret the gradient/slope of the straight line
- Determine the y-intercept of a straight line

Stimulus: Begin the lesson by recalling that linear equation is any equation that has the order/exponent/power of 1 and that there are three forms of representing linear equations. The equations for horizontal line, vertical lines, and any straight line on the Cartesian coordinates are $y = v$, $x = a$, *and* $ax + by = c$.

Explain to the students that there are two more ways of representing equations; $y = mx + c$ *and* $y = mx$. The m in the equation represents the gradient of the line, while c is the point of intersection on the y-axis. To construct the graph of these equations, a number of values for x are taken and substituted within the equation to find corresponding values of y. Point out to the students that if the points do not line up, there has been a mistake, and students need to go through their work again. Next, move on to explain to the students that to find the value of gradient, we select any points on the graph to calculate change in x over changes in y. The slope of the positive gradient slopes up from left to right while the slope of the negative gradient slopes down from left to right. Use the textbook to support your explanation.

Competency 2:

- Construct simultaneous linear equations in two variables
- Solve simultaneous linear equations in two variables using:
  - elimination method
  - substitution method
  - graphical method

باب
۷

خطی مساوات اور خطی نامساوات

قابلیت ۱:

- سیدھی لکیر کی ڈھلوان (Gradiant) کو پہچان سکیں۔ افقی horizontal اور عمودی (verticle) لکیروں کی (Lines) equation $x = a$ اور $y = c$ کو یاد کرسکیں۔
- اگر equation میں x معلوم ہو تو y کی value نکال سکیں اور اس کے برعکس عمل کرسکیں۔
- دو variables والی liner equations کا گراف بنا سکیں۔ جیسے y=mx+c اور y=mx
- سیدھی لکیر (straight line) کے ڈھلوان/ slope کی تشریح کرسکیں۔
- سیدھی لکیر (straight line) کا y-intercept معلوم کرسکیں۔

محرک : سبق کا آغاز یہ دہراتے ہوئے کیجیے کہ خطی مساوات (Liner equation) وہ eqution ہے۔جس میں variable زیادہ سے زیادہ کی قوت (Power/exponent) ایک ہوتی ہے۔ Liner equation کو تین شکلوں میں represent کیا جاسکتا ہے۔ افقی لکیر (horizontal line) کے لیے equations، عمودی لکیر (verticals line) اور کوئی بھی سیدھی لکیر straight line جو cartesian coordinates پر ہو یعنی $y = v$، $x = a$ اور $ax + by = c$۔

طلبہ کو سمجھائیے کہ equations کو دو اور طریقوں سے بھی ظاہر کیا جاسکتا ہے $y = mx + c$ اور $y = mx$۔ equation میں موجود m لائن کے ڈھلوان (gradiant of the line) کو ظاہر کرتا ہے جب کہ c محور (axes) پر y وہ نقطۂ تقاطع point of intersection ہے جہاں گراف y محور (axes) کو کاٹتا ہے۔کسی بھی equation کا گراف بنانے کے لیے x کی مختلف values کو لیتے ہیں اور پھر ان values کو equation میں رکھ کر y کی متعلقہ value کو حاصل کرتے ہیں طلبہ کو یہ نکتہ وضاحت سے سمجھائیے کہ اگر حاصل ہونے والے نقاط (points) ایک سیدھی لائن میں نہ آئیں تو اس کا مطلب ہے کہ کہیں نہ کہیں کوئی غلطی ہوئی ہے اور طلبہ کو اپنے کام کا ازسرنو جائزہ لینا چاہیے۔طلبہ کو یہاں یہ بھی سمجھائیے کہ gradient کی value معلوم کرنے کے لیے ہم گراف پر کسی بھی point کو منتخب کرتے ہیں تاکہ x میں ہونے والی تبدیلیوں پر y میں تبدیلی کا حساب لگائیں۔ مثبت ڈھلوان والی لائن Left سے Right اوپر کی طرف جاتی ہے جب کہ منفی ڈھلوان والی لائن Right سے Left نیچے کی طرف جاتی ہے اپنی وضاحت کو مزید مؤثر بنانے کے لیے درسی کتاب کے حوالے استعمال کیجیے۔

قابلیت ۲:

- دو متغیرات (variables) میں بیک وقت خطی مساوات (Linear equations) بناسکیں۔
- دو متغیرات (variables) میں بیک وقت خطی مساواتوں (Linear equations) کو حل کرنے کے لیے ذیل کا استعمال کرسکیں۔
  - elimination کا طریقہ
  - متبادل substitution کا طریقہ
  - گراف graphical method کا طریقہ

Stimulus: Students are familiar with linear equations. Recall with them that any equation that has the order/exponent/power of 1 is called a linear equation. The students know how to solve linear equations with one variable. In this grade, they will learn how to construct and solve linear equations with two variables. Tell the students that you've thought of two numbers that sum together to 20, and their difference is 6. Now ask them to figure out the numbers you have thought of. Let them conclude and discuss their answers with them. Once they do, move on to explaining to them that we can assume x and y as the two numbers you have thought of. Now, to fulfil the conditions, we can assume that:

$x + y = 20$
$x - y = 6$

Such equations are called simultaneous linear equations. Simultaneous linear equations are a set of equations that share one or more common variables and are solved together at the same time. The equations above are simultaneous. To solve such equations, three methods are used. Out of the substitution and elimination methods, unless instructed otherwise, students may use either method to find an answer according to their ease. The graphical method uses a graph to find the solution, which is the point where both lines intercept.

Begin with explaining the substitution method where we first isolate one variable (y) from an equation (iii).

(i) $x + y = 20$
(ii) $x - y = 6$
(ii) *isolate x from equation*
so, $x - y = 6$
(iii) $x = 6 + y$

Now, equation (iii) is substituted in equation (i) to obtain the value of y.

subsitute equation (iii) in equation (i)
so, $x + y = 20$
$(6 + y) + y = 6$
$6 + 2y = 20$
$2y = 20 - 6$
$2y = 14$
$y = \frac{14}{2}$
$\boxed{y = 7}$

محرک: طلبہ کو linear equations کا پہلے سے علم ہے ان کے ساتھ یہ بات دہرائیے کہ کوئی بھی ایسی equation جس میں متغیر (variable) کی power/ درجہ/ قوت 1 ہو اسے خطی مساوات (Linear equation) کہتے ہیں طلبہ جانتے ہیں کہ ایک variable والی Linear equation کو کیسے حل کرتے ہیں۔ اس جماعت میں وہ دو متغیروں والی خطی مساواتیں (Linear equations) بنانا اور حل کرنا سیکھیں گے۔ طلبہ سے کہیں کہ آپ نے کوئی سے دو عدد سوچے ہیں جن کا مجموعہ (sum) 20 ہے اور ان کا فرق (difference) 6 ہے اب طلبہ سے کہیں کہ کیا وہ بتا سکتے ہیں کہ وہ دو عدد کون سے ہیں۔ انھیں اپنے جوابات سوچنے دیں اور ان سے تبادلۂ خیال کیجیے۔ جب وہ کسی نتیجے پر پہنچ جائیں تو انھیں وضاحت سے سمجھائیے کہ ہم ان دو اعداد کو x اور y فرض کر سکتے ہیں۔ اب ان conditions کو پورا کرنے کے لیے ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ

$x + y = 20$

$x - y = 6$

ایسی مساواتیں (equations) خطی ہم زاد مساواتیں (Linear equations) کہلاتی ہیں۔ خطی مساواتیں ایسی مساواتوں کا مجموعہ ہیں جن میں ایک یا زائد مشترکہ متغیرات (common variables) ہوتے ہیں اور انھیں ایک ساتھ حل کیا جا سکتا ہے۔ ایسی equations کو تین طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے substitution method اور elimination method اگر کوئی واضح ہدایت نہ ہوں تو طلبہ مساواتوں کو حل کرنے کے لیے اپنی سہولت کے مطابق ان میں سے کسی ایک طریقے کو اختیار کر سکتے ہیں۔ graphical method میں equation کو حل کرنے کے لیے گراف کا استعمال کیا جاتا ہے حل سے مراد وہ نقطہ جہاں دونوں لکیریں (Lines) ایک دوسرے کو کاٹتی (intercept) ہیں۔

ہم substitution method سے آغاز کرتے ہیں جس میں ہم پہلے ایک equation (iii) سے ایک متغیر (variable) کو الگ کرتے ہیں۔

(i)	$x + y = 20$
(ii)	$x - y = 6$
(ii)	*isolate x from equation*
	so, $x - y = 6$
(iii)	$x = 6 + y$

اب equation (iii) equation (i) میں رکھ کر y کی قیمت (value) حاصل کی جاتی ہے۔

subsitute equation (iii) in equation (i)

so, $x + y = 20$

$(6 + y) + y = 6$

$6 + 2y = 20$

$2y = 20 - 6$

$2y = 14$

$y = \frac{14}{2}$

$\boxed{y = 7}$

Once the value of y is obtained, substitute y in equation (ii) to obtain the value of x.

subsitute $y = 7$ in equation (ii)

$x - y = 6$

$x - 7 = 6$

$x = 6 + 7$

$\boxed{x = 13}$

To verify if the values of both variables arecorrect, ask the students to substitute them and check if the equations are true. Once the students are easily able to carry out the substitution method, move on to the elimination method. In this method, one variable is eliminated or removed by either adding or subtracting the corresponding terms of the equation. Point out to the students that to eliminate a variable, the numerical value of the coefficient of both variables in both equations must be the same. In case it is not, it must first be made common by multiplying the number with a common factor. For example, for equations $3a + 5b = 31$and $2a + 3b = 20$, multiply the first equation with 2 and the second equation with 3 to get common coefficients. Secondly, if the signs of the coefficient are different, we add the equations. If the signs of the coefficients are the same, we subtract the equations. Using examples from the textbook, explain the elimination method to the students. Emphasise to the students that any of the two variables can be eliminated first, but the result will always be the same. Students often make the mistake of thinking any number may be a value of x or y; however, it is necessary to point out that the solution must satisfy both the equations at the same time.

The last method is the graphical method. Explain to the students that simultaneous equations can be solved graphically by drawing the graphs for each equation on the same axes. The coordinates of the point of their intersection are the solution to the simultaneous equations. To draw the graph, multiple values are substituted in each equation, and the graphs are plotted. If there is no intersection, it is concluded that there is no solution. In such cases, students often think that they have made a mistake. Therefore, it is necessary to emphasise that such equations mean that the lines are parallel, and no solution is a valid outcome. Similarly, if both lines coincide completely with one another, the solutions are infinite. Using the examples and exercises from the book, help the students construct simultaneous equations and solve them.

Competency 3:

- Solve simple linear inequalities, that is $ax > b$ or $cx < d$, $ax + b < c$ or $ax + b > c$
- Represent the solution of linear inequality on the number line

y کی value حاصل ہوجانے کے بعد x کی value حاصل کرنے کے لیے equation (ii) میں y کو تبدیل کیجیے۔

subsitute $y = 7$ *in equation (ii)*

$x - y = 6$

$x - 7 = 6$

$x = 6 + 7$

$\boxed{x = 13}$

یہ verify کرنے کے لیے کہ دونوں متغیرات (variable) کی قیمت درست ہیں یا نہیں طلبہ سے کہیں کہ وہ ان قیمتوں کو equation میں رکھ کر دیکھیں آیا کہ مساواتیں ثابت ہوتی ہیں۔

جب آپ کو یقین ہوجائے کہ طلبہ بہ آسانی substitution method کو استعمال کرنے لگیں ہیں تو انھیں Elimination method کو سمجھائیے۔ اس میں ایک متغیر (variable) کو ختم یا خارج کر دیا جاتا ہے جو کہ equations کی متعلقہ terms کو جمع یا تفریق کر کے کیا جاتا ہے۔ طلبہ کو وضاحت سے بتائیے کہ کسی variable کو ختم کرنے کے لیے دونوں equation میں دونوں variable کے عددی سر (coefficient) کی value ایک جیسی یعنی برابر ہونی چاہیے۔ اگر ایسا نہیں ہے تو پہلے ان اجزا کو کسی مشترکہ عدد comman factor سے ضرب دے کر برابر کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر ان دو مساواتوں (equations) میں $2a + 3b = 20$ اور $3a + 5b = 31$ پہلی equation کو 2 سے اور دوسری equation کو 3 سے ضرب دیجیے تاکہ common coefficient کو حاصل کیا جاسکے۔ دوسرے مرحلے میں یہ دیکھیے کہ اگر coefficient کی علامتیں مختلف ہوں تو equations کو جمع کیجیے اور اگر یہ علامتیں ایک جیسی ہوں تو equations کو تفریق کیجیے۔ elimination method وضاحت سے سمجھانے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں سے مدد لیجیے۔ طلبہ کو یہ بات بھی واضح طور پر سمجھائیے کہ دونوں میں سے کوئی بھی ایک variable پہلے ختم کیا جاسکتا ہے۔ لیکن نتیجہ ہمیشہ ایک ہی رہے گا۔ اکثر طلبہ سوچتے ہوئے یہ غلطی کرتے ہیں کہ کوئی بھی عدد x یا y کی value ہوسکتا ہے۔ تاہم یہ بتانا ضروری ہے کہ حل وہی درست ہوگا جو بیک وقت دونوں مساواتوں کو درست ثابت کرسکے۔ تیسرا اور آخری طریقہ graphical method کہلاتا ہے۔ طلبہ کو سمجھائیے کہ simultaneous equations کو بذریعہ گراف بھی حل کیا جاسکتا ہے۔ جس میں ہر equation کا گراف ایک ہی محور (axes) پر بنایا جاتا ہے۔ جس مقام پر دونوں لکیریں ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں اس نقطے کے coordinate ہی ان equations کا حل ہوتے ہیں گراف بنانے کے لیے multiple values کو ہر مساوات میں رکھ کر نقاط points حاصل کیے جاتے ہیں اور ان کی مدد سے گراف بنایا جاتا ہے۔ اگر لکیریں ایک دوسرے کو Intersect نہیں کرتیں تو نتیجہ یہ نکلتا ہے کہ اُن کا کوئی حل موجود نہیں، ایسے مواقع پر اکثر طلبہ یہ خیال کرتے ہیں کہ انھوں نے کوئی غلطی کی ہے لہٰذا یہ بات سمجھانا ضروری ہے کہ ایسی equations کا مطلب ہے کہ لکیریں متوازی (parallel) ہیں اور کسی حل کا نہ ہونا بھی ایک درست نتیجہ ہے۔ اسی طرح اگر دونوں لکیریں مکمل طور پر ایک دوسرے پر منطبق (coincide) ہوجائیں تو ایسی صورت میں solution بھی لامحدود (infinite) ہوتے ہیں۔ درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو استعمال کرتے ہوئے طلبہ کو simultaneous equations بنانے اور حل کرنے میں مدد دیں۔

قابلیت ۳:

- سادہ Linear inequlities کو حل کرسکیں۔ یعنی $ax > b$ or $cx < d$, $ax + b < c$ or $ax + b > c$۔
- حل کو عددی خط (number line) پر ظاہر کرسکیں۔

Stimulus: Begin the lesson by writing inequality signs on the board: <, >, ≤, ≥. Ask the students what each of them means. Inform the students that these signs help describe the relationship between quantities that are not equal. Linear inequalities, as the name suggests, are linear equations, but instead of the equality sign, there is an inequality sign. This is because linear inequalities show a range of possible solutions instead of one. For example, $5x + 7 < 22$ means all the possible values of x that make the make the expression true are less than 22. It is very necessary to emphasise this point as students often treat the inequality sign as an equal sign, not realizing that inequality refers to a range of values. Before solving inequality, explain the following properties of inequalities to the students:

- Addition property of inequality: adding the same number to each side of the inequality does not change the inequality sign.
- Subtraction property of inequality: subtracting the same number to each side of the inequality does not change the inequality sign.
- Multiplication property of inequality: multiplying the same number to each side of the inequality does not change the inequality sign provided that the number is a positive number. However, in case of multiplication with a negative number, an equivalent inequality is not produced unless the inequality sign is flipped.
- Division property of inequality: dividing the same number to each side of the inequality does not change the inequality sign provided that the number is a positive number. However, in case of a division with a negative number, equivalent inequality is not produced unless the inequality sign is flipped.

Linear inequalities are simplified in the same way as linear equations. However, it is essential to point out to the students that they need to be extra careful about the inequality sign when multiplying or dividing both sides by a negative number. Similarly, when swapping the left- and right-hand sides, it is also essential to change the direction of inequality. For example: $12 > 2x + 7$

$$12 > 2x + 7$$

$$12 - 7 > 2x$$

$$5 > 2x$$

$$x < \frac{5}{2}$$

Move on to explaining to the students how to represent inequalities on the graph. The graph of linear inequality in one variable is a number line. Use an open circle for < and > and a closed circle for ≤ and ≥. Use the text and examples from the textbook to help students attain mastery in this competency.

محرک: inequalities signs کو بورڈ پر لکھتے ہوئے سبق کی ابتدا کیجیے۔ $\geq$, $\leq$, $<$, $>$ طلبہ سے پوچھیے کہ کیا وہ ان علامتوں کا مطلب جانتے ہیں پھر طلبہ کو وضاحت سے بتائیے کہ یہ وہ علامتیں ہیں جو ان مقداروں کے درمیان تعلق کو بیان کرنے میں مدد کرتی ہیں جو برابر (equal) نہیں ہوتیں۔ جیسا کہ نام سے ظاہر کہ Linear inequalities، دراصل Linear equations کی طرح ہی ہوتی ہیں لیکن ان میں equality sign کی بہ جائے inequality sign لگی ہوتی ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ linear inequalities ایک مخصوص حل کے بہ جائے ممکنہ حل کی پوری ایک حد (range) کو پیش کرتی ہیں مثال کے طور پر $5x + 7 > 22$ کا مطلب ہے 2 کی وہ تمام ممکنہ قدریں (value) جو اس expression کو درست (true) بناتی ہیں وہ 22 سے کم (less) ہوں گی۔ یہ نکتہ واضح کرنا انتہائی ضروری ہے کیونکہ طلبہ اکثر عدم مساوات inequality sign کو مساوی علامت (equal sign) کے طور پر سمجھ لیتے ہیں اور یہ نہیں سمجھ پاتے کہ inequality کا مطلب ہے حل کی ایک پوری range اس لیے inequality کو solve کرنے سے پہلے طلبہ کو inequality کی درج ذیل خصوصیات کے بارے میں وضاحت سے بتائیے:

- Inequality کی جمع کی خصوصیت: اگر ہم inequality کی دونوں طرف ایک ہی عدد کو جمع کریں تو inequality sign میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔
- Inequality کی نفی کی خصوصیت: اگر ہم inequality کی دونوں طرف ایک ہی عدد کو نفی کریں تو تب بھی inequality sign تبدیل نہیں ہوتی۔
- اگر ہم Inquality کی دونوں طرف ایک ہی عدد کو ضرب دیں جو مثبت ہو تو inequality sign تبدیل نہیں ہوتی لیکن ایک منفی عدد سے ضرب دیں تب inequalitys sign کو الٹ دینا ضروری ہے ورنہ equivalent inequality پیدا نہیں ہو گی۔
- Inequality کی تقسیم کی خصوصیت: اگر ہم inequality کی دونوں طرف ایک مثبت عدد سے تقسیم کریں تو inequality sign میں تبدیلی نہیں ہوتی البتہ منفی عدد کے ساتھ تقسیم کی صورت میں equivalent inequality پیدا نہیں ہوتی جب تک کہ inequality sign کو الٹ نہ دیا جائے۔

Linear inequalities کو Linear equations کی طرح آسان بنایا جاسکتا ہے۔ تاہم یہاں طلبہ کو یہ بات سمجھانا اشد ضروری ہے کہ کسی منفی عدد کے ساتھ دونوں طرف تقسیم یا ضرف کرنے کی صورت میں انھیں inequality sign کے حوالے سے محتاط رہنا ہوگا۔ اسی طرح ہم جب دائیں اور بائیں طرف کو آپس میں تبدیل (swap) کریں۔

inequality sign کی سمت بھی تبدیل کرنا ضروری ہوتا ہے مثال کے طور پر: $2x + 7 < 12$

$$12 > 2x + 7$$

$$12 - 7 > 2x$$

$$5 > 2x$$

$$x < \frac{5}{2}$$

اب طلبہ کو سمجھائیے کہ گراف کے ذریعے inequalities کو کیسے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایک متغیر (variable) والی linear inequalities کا گراف ایک عددی لکیر (number line) کی شکل میں ہوتا ہے۔ اگر علامت $<$ اور $>$ ہو تو open circle استعمال کیا جاتا ہے اور اگر علامت $\leq$ اور $\geq$ ہوں تو closed circle کو استعمال کریں۔ اس قابلیت میں مہارت کے لیے طلبہ کو درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو کروائیے۔

Unit 8
Practical Geometry

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Construct a triangle when:
    - three sides (SSS)
    - two sides and included angle (SAS)
    - two angles and included side (ASA)
    - a right-angled triangle when hypotenuse and one side (HS) are given
- Construct different types of quadrilaterals (square, rectangle, parallelogram, trapezium, rhombus, and kite)
- Draw angle and line bisectors to divide angles and sides of triangles and quadrilaterals

Stimulus: This competency would require students to use their knowledge of properties of various 2D shapes and apply it practically. Begin the lesson with a short recap of the properties of triangles and quadrilaterals. Explain to the students that triangles are closed figures with three sides and vertices. A triangle has six components that determine its type. Equilateral, scalene, and isosceles triangles are named according to the sides of the triangles, whereas acute-angled, right-angled and obtuse angled triangles are named according to their angles. Point out to the students that a triangle can be uniquely determined and, in our case, constructed when three independent components are known. The components are:

- Side-side-side (SSS): if the three sides of two triangles are given.
- Side-Angle-Side (SAS): If two sides and the corresponding angles of those sides are given.
- Angle-Side-Angle (ASA): If two triangles have two corresponding angles, and the side included between these two angles is given.
- Right angle-Hypotenuse-Side: This condition is specific only to a right-angle triangle. If length of one side and the hypotenuse is given.

Once the students have recalled triangles, move on to recalling with them the properties of quadrilaterals. Revise with them that quadrilaterals are closed 2D figures that have four sides and vertices with all interior angles summing up to 360°. Square, rectangle, parallelogram, trapezium, rhombus, and kite are all quadrilaterals. Use the following table to help students revise the properties of the mentioned quadrilaterals.

عملی جیومیٹری

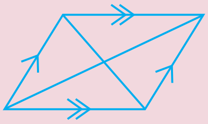
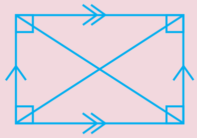
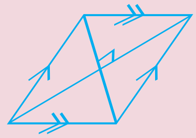
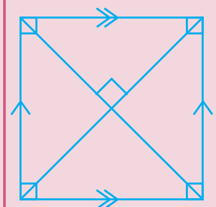
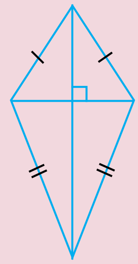
قابلیت ۱

- مثلث بنا سکیں جب:
  - تین اطراف (SSS) دی گئی ہوں۔
  - دو اطراف (SAS) اور درمیانی زاویہ دیا گیا ہو۔
  - دو زاویے بشمول side (ASA)
  - قائمۃ الزاویہ مثلث جب وتر (hypotenuse) اور ایک طرف (HS) دی گئی ہو
- مختلف اقسام کی چوکور (quadrilaterals) اشکال کو بنا سکیں۔ مربع (square)، مستطیل (triangle)، متوازی الاضلاع (parallelogram) ٹریپوزیم، لوزی (Rhmbus) پتنگ نما شکل (kite)
- زاویوں اور مثلث (triangles) اور چوکور (quadrilaterals) کے اطراف کو تقسیم کرنے کے لیے زاویہ اور خط (line) کے bisectors بنا سکیں۔

محرک: اس قابلیت کے لیے طلبہ کو اپنی دو ابعادی 2D اشکال کی خصوصیات کے حوالے سے گزشتہ معلومات کو استعمال کرنے اور اس کو عملی طور پر لاگو کرنے کی ضرورت ہو گی۔ سبق کا آغاز مثلث اور چوکور quadrilaterals کی خصوصیات کو مختصراً دہراتے ہوئے کیجیے طلبہ کو بتایئے کہ triangles ایک ایسی بند شکل ہے جس کی تین اطراف اور تین کونے (vertices) ہوتے ہیں اس کے چھ اجزا ہوتے ہیں جو یہ تعین کرتے ہیں کہ مثلث کس قسم کی ہے اطراف کے مطابق ان کے نام Equilateral، scalene، اور isosceles triangles ہیں جب کہ زاویوں کے لحاظ سے انھیں حادۃ الزاویہ مثلث، قائمۃ الزاویہ مثلث، منفرجہ الزاویہ مثلث نام دیے گئے ہیں۔ طلبہ کو بتایئے کہ انفرادی طور پر مثلث کا تعین کیا جا سکتا ہے اگر ہمیں اس کے تین اجزا معلوم ہوں تو اسے ہم بہ آسانی بنا سکتے ہیں یہ اجزا درج ذیل ہیں:

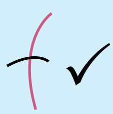
- سائیڈ۔سائیڈ۔سائیڈ (SSS) : اگر دو مثلثوں کی تین اطراف (sides) معلوم ہوں/دی گئی ہوں۔
- سائیڈ۔سائیڈ۔سائیڈ (SSS) : اگر دو اطراف اور ان کا درمیانی زاویہ (corresponding angles) دیے گئے ہوں۔
- اینگل۔سائیڈ۔اینگل (ASA) : اگر دو triangles میں دو متعلقہ زاویے ہوں اور ان دو زاویوں کے درمیان والی side دی گئی ہو۔
- قائمۃ الزاویہ۔وتر (hypotenus)۔سائیڈ : یہ اصول صرف قائمۃ الزاویہ مثلث کے لیے مخصوص ہے۔ اگر ایک طرف (side) اور وتر (hypotenuse) کی لمبائی دی گئی ہو۔

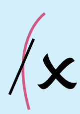
جب طلبہ مثلثوں کا اعادہ کر چکیں تو انھیں چوکور اشکال (quadrilaterals) کی خصوصیات یاد دلاتے ہوئے دہرایئے کہ quadrilaterals دو ابعادی (2D) بند اشکال ہیں جن کی چار اطراف (sides) اور چار کونے (vertices) ہوتے ہیں اور ان کے داخلی زاویوں (interior angles) کا مجموعہ 360° درجے ہوتا ہے۔ مربع (squares) مستطیل (rectangle)، متوازی الاضلاع (parallelogram) ٹریپوزیم (trapezium)، لوزی (rhombus)، پتنگ (kite) یہ تمام چوکور اشکال کی مختلف اقسام ہیں۔ طلبہ کو ان اشکال کی خصوصیات یاد دلانے میں درج ذیل جدول مدد فراہم کرے گا۔

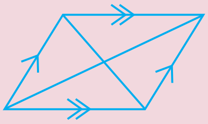
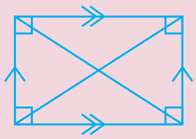
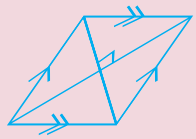
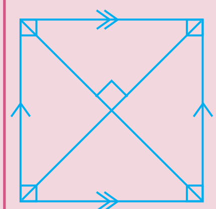
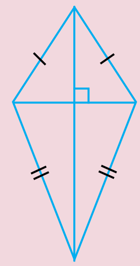
Special quadrilateral	Parallelogram 	Rectangle  (special type of parallelogram)	Rhombus  (special type of parallelogram)	Square  (special type of rectangle and rhombus)	Kite 
Diagonals	Bisect each other	Bisect each other and are equal in length	Bisect each other at 90° and bisect the interior angles	Bisect each other at 90°, are equal in length and bisect the interior angles	Cut each other at 90° and one of them bisects the interior angles
Line(s) of symmetry	0	2	2	4	1

Once the students have revised all properties of 2D figures, it helps them construct figures more easily. Construction requires certain tools to be used. The correct use of these tools results in precise construction of angles and bisectors. Demonstrate the tools, pencil, ruler, protractor, and compass, in the classroom.

Emphasise the proper use of ruler, protractor, and compass. Tell the students to use a ruler that is not chipped from any side. Remind them to align the ruler properly when constructing, so it doesn't slip. When using the pencil, have the students sharpen it freshly so it is pointed and makes a thin line. Ask the students to draw light lines in case they need to be corrected. The correct use of protractors is also necessary during construction of angles and bisectors. If the protractor is not aligned with the starting point of construction, it may result in an angle that is either larger or smaller than the required angle. Students also tend to misread the protractor and construct incorrect angles (and read them from the opposite side, for example, make obtuse angles instead of acute angles), therefore, accurate measurement should be highly emphasised on. Similarly, the compass width is to be kept constant, so the radius of the arc does not change and results in an incorrect bisector. Point out to the students that when making an intersection with a line or an arc, they should ensure the angle of intersection is as close to 90° as possible.



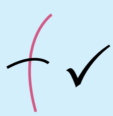


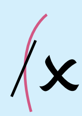
Special quadrilateral	Parallelogram	Rectangle	Rhombus	Square	Kite
		 (special type of parallelogram)	 (special type of parallelogram)	 (special type of rectangle and rhombus)	
Diagonals	Bisect each other	Bisect each other and are equal in length	Bisect each other at 90° and bisect the interior angles	Bisect each other at 90°, are equal in length and bisect the interior angles	Cut each other at 90° and one of them bisects the interior angles
Line(s) of symmetry	0	2	2	4	1

دو ابعادی (2D) اشکال پر نظر ثانی کرنے کے بعد طلبہ کے لیے انھیں بنانا آسان ہو گا۔ ان اشکال کو درستی کے ساتھ بنانے کے لیے مخصوص آلاتِ جیومیٹری کا استعمال ضروری ہوتا ہے تاکہ زاویوں اور زاویہ منصف یا تقاطع (bisectors) کو درست پیائش کے ساتھ بنایا جاسکے۔ آپ جماعت میں ان آلات (پنسل، رولر، پروٹیکٹر اور کمپاس) کو استعمال کر کے دکھایئے۔

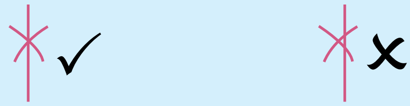
ruler، پروٹیکٹر اور کمپاس درست طریقے سے استعمال کرنے پر طلبہ کی توجہ مرکوز کروایئے۔

طلبہ سے کہیں کہ ٹوٹا ہوا رولر استعمال نہ کریں زاویے بناتے وقت وہ رولر (فٹہ) کو درست طور پر نقطوں پر رکھیں اور اس پر اپنی گرفت مضبوط رکھیں تاکہ وہ حرکت نہ کرے۔ اسی طرح پنسل استعمال کریں تو اس کی نوک کو اچھی طرح تراشیں تاکہ ایک باریک اور واضح لکیر یا خط کھینچا جا سکے۔ طلبہ سے کہیں کہ وہ ہلکی لکیر کھینچیں تاکہ ضرورت پڑنے پر اسے مٹا کر بہ آسانی درست کیا جا سکے۔ پروٹیکٹر یعنی زاویہ پیما کا درست استعمال بھی زاویے اور ان کے تقاطع (bisectors) کے لیے ضروری ہے اگر زاویہ پیما (پروٹیکٹر) کو درست طریقے سے ابتدائی نقطے پر نہ رکھا جائے تو بننے والا زاویہ مطلوبہ پیمائش کے زاویے سے چھوٹا یا بڑا بنے گا۔ اکثر طلبہ پروٹیکٹر کو غلط پڑھتے ہیں اور غلط زاویہ بناتے ہیں جیسے مخالف سمت سے پڑھنا اور حادہ (acute) کی جگہ منفرجہ زاویہ (obtuse angle) بنالینا لہٰذا پیمائش کی درستی پر خاص زور دیں۔ اسی طرح پرکار (compass) کی چوڑائی (width) کا مستقل رکھنا بھی ضروری ہے تاکہ لکیر یا قوس (arc) کا رداس (radius) نہ بدلے اور نتیجے میں تقاطع (bisector) غلط نہ بن جائے۔ اس بات کی نشان دہی کرنا بھی ضروری ہے کہ line یا arc کے ساتھ intersection بناتے ہوئے اس بات کو یقینی بنایئے کہ angle of intersection جتنا ممکن ہو 90o سے بہت زیادہ مختلف نہ ہو۔



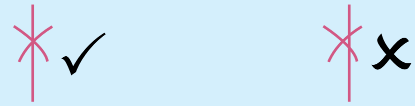


Furthermore, ask them to carefully draw a line through a point to ensure accuracy.



All construction lines must be shown clearly, and none of them should be erased. Using all steps from the textbook as they are, go through construction with the students step-by-step. This chapter requires a lot of practice to gain mastery, therefore, help the students carry out questions from the exercises and independent worksheets as guided and independent practice.

مزید برآں، درستی کو یقینی بنانے کے لیے ان سے کہیں وہ احتیاط کے ساتھ ایک point کے ذریعے لائن کھینچیں۔



تمام لائنیں واضح طور پر دکھائی دینی چاہییں اور وہ مدہم یا مٹی ہوئی سی نہیں لگنی چاہیے۔ درسی کتاب میں دیے گئے تمام مراحل کو من وعن استعمال کروایئے اور ہر مرحلے کی وضاحت کے لیے بورڈ کا استعمال کیجیے طلبہ کو اس باب میں مہارت حاصل کرنے کے لیے بہت زیادہ مشق کی ضرورت ہے اس لیے طلبہ کی رہنمائی کیجیے کہ وہ مشقوں میں دیے گئے سوالات اور علیحدہ سے ورک شیٹ کا استعمال دی گئی ہدایت کے مطابق اور خود مختار مشق کے طور پر بھی کر سکتے ہیں۔

Unit 9 Congruence, Similarity, and Transformation

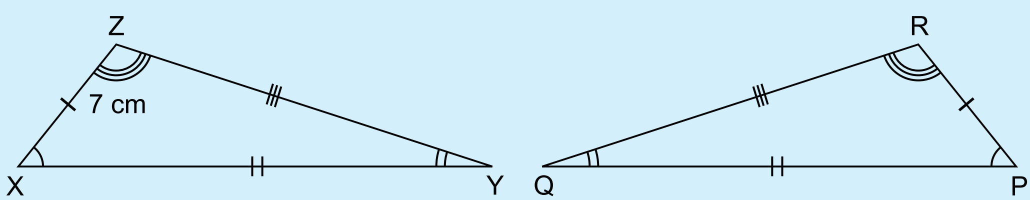
Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Identify congruent and similar figures (in your surroundings)
- Apply properties of two figures to be congruent or similar
- Apply postulates for congruence between triangles

Rationale: The outcome of this competence allows students to develop geometrical skills and visual literacy of recognising different shapes in real-life. Congruence in figures is an interesting concept that helps us build and improve mathematical reasoning skills. It is a bridge to understanding more complex geometric topics such as transformation, symmetry, and tessellation.

Stimulus: Begin the lesson by bringing in two coins of the same and different sizes. Show the coins to the class. Now, using a bigger and smaller coin, slide the bigger coin over the smaller coin and ask the students if both the objects coincide completely with one another. The students will say no. Now, using the coins of the same size, place one over the other and ask the students if both the coins coincide with one another. They will say yes. Explain to them that the smaller and bigger coins were *similar* to each other, however the two coins of the same size were *congruent*. Explain the terms 'similar' and 'congruent' to the students. Congruent figures coincide completely with each other when one is slid or turned around and placed over the other. The method used to examine congruence by placing one project over the other is called the method of superposition. Congruent objects are always the same shape and size. However, in cases of congruent figures, sides and angles are considered. The matching sides are known as corresponding sides, and the corresponding angles that match corresponding positions in the other figure are known as corresponding angles. Inform the students that the symbol for congruence is ≅, which means 'is congruent to'. Once students are familiar with the definition of congruence, move on to the topic of congruence in triangles. Draw two triangles on the board:



For two triangles to exactly coincide with each other, all their parts must be respectively congruent. That is:

- Length of XZ = Length of PR
- Length of ZY = Length of RQ

باب ۹

تماثل، مشابہت (ہم آہنگی) اور تحویل

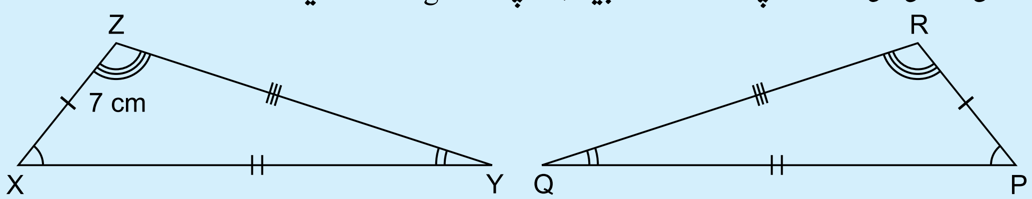
قابلیت ۱

- اپنے اردگرد ماحول میں موجود مماثل (congruent) اور مشابہ اشکال (similar figures) کو پہچان سکیں۔
- دو اشکال کی خصوصیات کی بنا پر مشابہت یا مماثلت کا اطلاق کر سکیں۔
- مثلثوں (triangles) کے درمیان مماثل کے اصولوں (postulates) کو لاگو کر سکیں۔

استدلال: اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کو جیومیٹری کی مہارتیں اور بصری خواندگی (visual literacy) کے حصول میں مدد دیتا ہے تاکہ وہ حقیقی زندگی میں مختلف اشکال کو پہچان سکیں۔ اشکال میں مماثلت (congruent) ایک دلچسپ تصور ہے جو ہمیں ریاضیاتی استدلال کی مہارتوں کو بہتر بنانے میں مدد دیتا ہے یہ جیومیٹری کے زیادہ پیچیدہ موضوعات جیسے transformation، symmetry اور tessellation کو سمجھنے میں ایک پل کی طرح مدد فراہم کرتا ہے۔

محرک: اس سبق کو پڑھانے کے لیے اپنے ساتھ دو سکّے لائیے جو سائز کے لحاظ سے مختلف اور ایک جیسے ہوں۔ کلاس میں موجود طلبہ کو یہ سکّے دکھایئے اب بڑے سکّے کو چھوٹے سکّے پر رکھ کر سلائیڈ کریں اور طلبہ سے پوچھیے کیا یہ دونوں سکّے ایک دوسرے پر پوری طرح آجاتے ہیں۔ طلبہ کہیں گے 'نہیں' کیونکہ سائز یا جسامت مختلف ہے اس لیے مطابقت نہیں ہے۔ اب وہ سکّے لیں جو سائز میں ایک جیسے ہیں انھیں ایک دوسرے پر رکھیں اور طلبہ سے پوچھیے کہ کیا دونوں سکّے مکمل طور پر ایک دوسرے پر آجاتے ہیں طلبہ کہیں گے 'جی ہاں' کیونکہ size اور شکل ایک جیسی ہے اس لیے مطابقت ہے۔ طلبہ کو سمجھایئے کہ چھوٹے اور بڑے سکّے ایک دوسرے سے ملتے جلتے مشابہ (similar) تھے تاہم دونوں سکّے جو سائز میں ایک جیسے تھے وہ 'congruent' ہیں اب طلبہ کو مماثل (congruent) اور مشابہہ (similar) کی term کو وضاحت سے بتایئے کہ congruent figures سے مراد دو ایسی اشکال یا اشیا جو بالکل ایک جیسی (coincide) ہوں یعنی جب انھیں ایک دوسرے پر رکھ کر پھسلایا (slide) یا موڑا جائے تو یہ مکمل طور پر ایک دوسرے پر منطبق ہوں congruence اشیا کو ایک دوسرے پر رکھ کر جانچنے کا عمل طریقہ انطباق super position method کہلاتا ہے۔

مماثل اشیا (congruent objects) سائز اور شکل میں ایک جیسی ہوتی ہیں تاہم مماثل اشکال (congruent figures) کی صورت میں ان کے اطراف (sides) اور زاویوں پر غور کیا جاتا ہے۔ متعلقہ اطراف کو مماث اطراف اور متعلقہ زاویوں کو مماثل زاویے کہا جاتا ہے۔ یہ علامت $\cong$ تماثل (congruence) کی علامت ہے جس کا مطلب ہے تماثل (congruence) ہے جب طلبہ اس تعریف کو وضاحت سے سمجھ لیں۔ تو انھیں اگلے موضوع موضوع مثلثوں میں مماثلت کو پڑھانے کا آغاز کیجیے۔ بورڈ پر دو triangles بنایئے۔



دو مثلثوں کو منطبق (cocide) ہونے کے لیے ان کے تمام اجزا (parts) بالترتیب ایک دوسرے کے مماثل (congruence) ہونے چاہییں یعنی:

- لمبائی XZ = لمبائی PR
- لمبائی XZ = لمبائی RQ

- Length of XY = Length of PQ
- m∠Z = m∠R
- m∠X = m∠P
- m∠Y = m∠Q

For the students to prove that both triangles are congruent, they need to show that all six of the above elements of one triangle match the corresponding elements of the other triangle. Point out to the students that the order in which the vertices and lengths of two triangles match must be known. This order is symbolically known as:

- Z ⟷ R (Z matches with R and R matches with Z)
- X ⟷ P
- Y ⟷ Q

Students often tend to believe that the angles are important; however, the order of length is equally important, that is, ZY ⟷ RQ and not QR. Further explain to the student that three pairs of corresponding parts can also determine if the triangles are congruent. The conditions are:

- Side-side-side (SSS): If the three sides of two triangles are equal, the triangles are congruent.
- Side-Angle-Side (SAS): If two sides and the corresponding angles of those sides are equal, the triangles are congruent.
- Angle-Side-Angle (ASA): If two triangles have two corresponding angles and the side included between these two angles are equal, then the triangles are congruent.
- Right angle-Hypotenuse-Side: This condition is specific only to a right-angle triangle. If two corresponding angles and the side included between these two angles, are equal, then the triangles are congruent.

Use examples from the book to further explain the above conditions to the students. Once they are well-versed with the concept, move on to similar figures.

Revise the definition of similar explained in the start of the lesson, that is similar figures have the same shape but not the same size. The two figures are similar if all the corresponding angles are equal and all the corresponding sides are in the same ratio. Draw the following triangles on the board:

- لمبائی XY = لمبائی PQ
- $m\angle Z = m\angle R$
- $m\angle X = m\angle P$
- $m\angle R = m\angle Q$

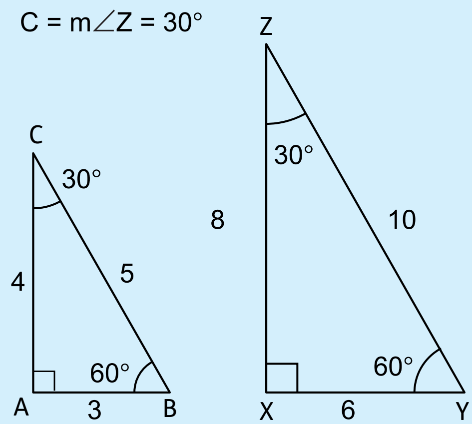
طلبہ کو یہ prove کرنے کے لیے کہ دونوں مثلث مماثل (congruent) ہیں بتایئے کہ ایک مثلث کے مذکورہ بالا تمام چھ اجزا (elements) یعنی تین اطراف اور تین زاویے دوسرے مثلث کے مماثل ہونے چاہییں۔ طلبہ کے لیے اس بات کی نشان دہی بھی کی جانی چاہیے کہ مثلثوں کے vertices اور اطراف کی ترتیب کا معلوم ہونا بھی ضروری ہے تاکہ یہ بتایا جاسکے کہ کون سا کس کے ساتھ مماثلت رکھتا ہے اس ترتیب کو علامتی طور پر یوں بیان کیا جاتا ہے۔

- $Z \longleftrightarrow R$ (یعنی z نقطہ R کے ساتھ مماثلت رکھتا ہے اور R نقطہ z کے ساتھ)
- $X \longleftrightarrow P$
- $Y \longleftrightarrow Q$

اکثر طلبہ صرف زاویوں کو اہم سمجھتے ہیں لیکن اطراف (sides) کی ترتیب بھی اتنی ہی اہم ہے یعنی $RQ \longleftrightarrow ZY$ نہ کہ QR۔ طلبہ کو یہ بھی سمجھایئے کہ متعلقہ حصوں کے تین جوڑے بھی یہ تعین کر سکتے ہیں کہ آیا مثلث مماثل (congruent) ہیں شرائط یہ ہیں:

- سائیڈ۔سائیڈ۔سائیڈ (SSS) : اگر دو مثلثوں کی تینوں sides برابر ہوں تو وہ مثلثیں مماثل (congruents) ہوتی ہیں۔
- سائیڈ۔اینگل۔سائیڈ (SAS) : اگر دو sides اور ان کے درمیان والا زاویہ برابر ہوں تو یہ مثلث آپس میں مماثل ہیں۔
- اینگل۔سائیڈ۔اینگل (ASA) : اگر دو مثلثوں کے دو درمیانی زاویے اور ان کے درمیان والی side برابر ہو تو یہ مثلثیں مماثل ہیں۔
- قائمۃ الزاویہ۔وتر (hypotenus)۔سائیڈ : یہ شرط صرف قائمۃ الزاویہ مثلث کے لیے مخصوص ہے

اگر ایک زاویہ قائمہ۔ وتر (hypotenus) اور ایک طرف side برابر ہو تو تب مثلثیں آپس میں مماثل ہوتی ہیں مذکورہ بالا شرائط کو مزید وضاحت سے بیان کرنے کے لیے درسی کتاب کی مثالوں کو استعمال کیجیے۔ جب آپ کو یقین ہو جائے کہ طلبہ نے ان اس تصور کو اچھی طرح سمجھ لیا ہے تب آپ اگلے موضوع کی جانب بڑھیں یعنی مشابہ اشکال (similar figures) سبق کے آغاز میں بیان کردہ مشابہت (similar) کی تعریف کو دہرایئے مشابہ اشکال وہ ہوتی ہیں جن کی شکل ایک جیسی ہوتی ہے لیکن جسامت (size) میں یہ مختلف ہوتی ہیں لہٰذا دو اشکال اس وقت مشابہ کہلاتی ہیں جب ان کے متعلقہ زاویے (corresponding angles) اور ان کے متعلقہ اطراف (corresponding sides) ایک نسبت (ratio) میں ہوں اب بورڈ پر درج ذیل مثلثوں کو بنایئے:



Point out to the students that all corresponding angles are equal and same, however the lengths are different (but with the same ratio).

$\frac{AB}{XY} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{BC}{YZ} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$\frac{CA}{ZX} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

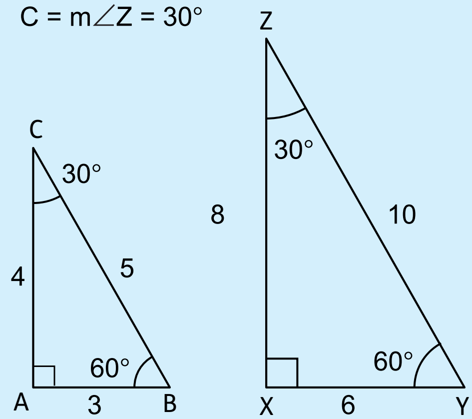
Therefore, ABC is similar to XYZ. Point out to the students that similar and congruent are not the same; for similar objects, only the shape is the same but for congruent objects, the size and shape both are exactly the same. They also believe that changes in orientation can affect a figure being similar and congruent, which is not true. Use different examples and exercises from the book to help students solidify their concepts.

Competency 2:

- Rotate an object and find the centre of rotation by construction
- Enlarge a figure (with the given scale factor) and find the centre and scale factor of enlargement

Stimulus: Students are familiar with what rotation is and how certain figures have reflective and rotation symmetry. Recall with them what reflective symmetry is, that is a shape has reflective symmetry if it is a mirror image of one another. Move on to recalling rotational symmetry with the students, that is a shape has rotational symmetry if it comes back to its original position after a full rotation. Furthermore, the number of times an object comes back to its original position within the rotation is called the order of rotation. Since a square comes 4 times, the order of rotation of a square is 4. The centre of rotation is a fixed point around which an object rotates. Students often make the mistake of assuming that the centre of rotation is always the origin. Therefore, it is essential to provide them with examples of various figures with different centres of rotation. Here the students

C = m∠Z = 30°



اس بات کی نشان دہی بھی کیجیے کہ تمام متعلقہ زاویے (corresponding angles) برابر ہوتے ہیں تاہم اطراف کی لمبائیاں مختلف ہیں لیکن وہ ایک ہی تناسب میں ہوتی ہیں۔

$$\frac{AB}{XY} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{BC}{YZ} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{CA}{ZX} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

چنانچہ مثلث ABC، مثلث XYZ کے مشابہ ہے۔ طلبہ کے لیے اس نکتے کی وضاحت بھی کیجیے کہ مشابہت (similar) اور مماثل (congruent) اشکال ایک جیسی نہیں ہوتیں کیونکہ similar objects میں صرف شکل (shape) ایک سی ہوتی ہے جب کہ congruent objects میں size اور shape ایک جیسی ہوتی ہیں۔ اکثر طلبہ یہ سمجھتے ہیں کہ اگر کسی شکل (figure) کی سمت (orientation) بدل دی جائے تو وہ مشابہ (similar) یا مماثل (congruent) نہیں رہتی لیکن یہ خیال درست نہیں لہٰذا طلبہ کو اس تصور میں پختہ کرنے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مشقوں اور مثالوں کو کروائیے۔

قابلیت ۲

- کسی object کو گھمائیں اور construction کے ذریعے اس کا گردشی مرکز (centre of rotation) تلاش کرسکیں۔
- کسی شکل کو (دیے گئے scale of factor کے ساتھ) بڑا enlarge کرسکیں۔ اور توسیع (enlargment) کا centre اور scale factor تلاش کرسکیں۔

محرک: طلبہ پہلے سے جانتے ہیں کہ گردش (rotation) کیا ہوتی ہے اور کچھ اشکال میں reflective اور گردشی توازن (rotation symmetry) موجود ہوتا ہے۔ اب ان کے ساتھ reflective symmetry کا اعادہ کیجیے یعنی ایک شکل میں reflective symmetry ہوتی ہے اگر وہ ایک دوسرے کا عکس (mirror image) ہیں اب آپ rotational symmetry کو طلبہ کے ساتھ دہرائیے۔ اگر کوئی شکل ایک مکمل گردش کے بعد اپنی اصل حالت میں واپس آجائے تو اس کا مطلب ہے کہ اس میں گردشی توازن (rotational symmetry) موجود ہے مزید برآں گردش کے دوران جتنی بار کوئی چیز اپنی اصل حالت پر واپس آتی ہے اسے گردش کی ترتیب (order of rotation) کہا جاتا ہے۔ جیسے ایک مربع (square) گھومنے پر 4 مرتبہ اپنی اصل حالت میں واپس آتا ہے لہٰذا اس کا order of rotation 4 ہے۔ گردشی مرکز وہ مستقل یا مقررہ نقطہ (fixed point) ہے۔ جس پر کوئی چیز گھومتی ہے۔ اکثر طلبہ یہ غلطی کرتے ہیں کہ وہ سمجھتے ہیں کہ گردش کا مرکز ہمیشہ اصل نقطہ

will learn to rotate an object by construction. Using the text and instructions from the book, explain the steps of rotating an image to the students. Students often find it difficult to identify correct corresponding angles, therefore, emphasise the direction and angles. You may use the clock face or compass directions to make it easier for them. Use examples from the book to help solidify the concept of rotation.

Move on to enlargement. The students are not familiar with this concept. Define enlargement is a type of transformation where the shape remains the same but the size changes. Enlargement may be big or small. The ratio by which an image is enlarged is called the scale factor of enlargement. If an image is two times larger, the scale factor is 2. If the scale factor is greater than 1, the shape becomes larger (enlarged); if it is between 0 and 1, the shape becomes smaller (reduced). The point from where the image appears to grow is called its centre of enlargement. Centre of enlargement can be anywhere on the plane; it does not need to be one vertex. Students often associate enlargement with making an image bigger; therefore, it is necessary to emphasise that any scale factor less than 1 always results in a smaller image. Use examples from the textbook to explain step-by-step enlargement of a figure to students.

(origin) ہوتا ہے۔ اس لیے ضروری ہے کہ طلبہ کو مختلف گردش مراکز کے ساتھ مختلف اشکال کی مثالیں دی جائیں۔ یہاں طلبہ rotation کے ذریعے کسی شکل کو گھمانا سیکھیں گے۔ درسی کتاب میں دیے گئے متن اور ہدایات کی روشنی میں طلبہ کو کسی image کو گھمانے کے عمل کی مرحلہ وار وضاحت کیجیے۔ اکثر طلب کے لیے درست متعلقہ زاویوں corresponding angles کو شناخت کرنا اور سمجھنا دشوار لگتا ہے اس لیے گردش کی سمت اور زاویوں پر زور دیجیے آپ اس کے لیے گھڑی کے ڈائل یا compass کی سمتیں استعمال کر کے انھیں بہ آسانی سمجھا سکتے ہیں۔ طلبہ کو گردش کے تصور میں پختہ کرنے کے لیے آپ درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کو استعمال کیجیے۔

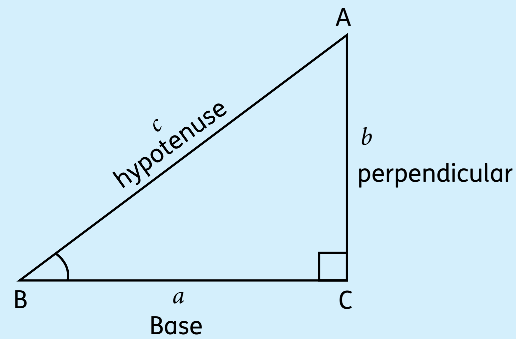
سبق کو جاری رکھتے ہوئے توسیع (enlargment) کے موضوع پر آجایئے طلبہ اس تصور سے اب تک لاعلم ہیں لہٰذا پہلے آپ توسیع (enlargment) کی تعریف کیجیے کہ یہ ایک قسم کی تبدیلی (transformation) ہے جس میں شکل وہی رہتی ہے لیکن اس کا سائز بدل جاتا ہے توسیع چھوٹی یا بڑی دونوں طرح کی ہوسکتی ہے۔ جس نسبت (ratio) سے کسی شکل کا تصویر (image) کو چھوٹا یا بڑا کیا جا ہے اسے اسکیل فیکٹر کہتے ہیں۔ اگر تصویر کو دوگنا بڑا کر دیا جائے تو اسکیل فیکٹر 2 ہو گا۔ اگر اسکیل فیکٹر 1 سے زیادہ ہو تو تصویر یا شکل بڑی (enlarg) ہوجاتی۔ اگر یہ اسکیل فیکٹر 0 اور 1 کے درمیان ہو تو شکل یا image چھوٹی ہو جاتی ہے۔ وہ نقطہ (point) جہاں سے تصویر یا شکل بڑھتی ہوئی محسوس ہوتی ہے اسے توسیع کا مرکز (centre of enlargment) کہا جاتا ہے یہ توسیع کا یہ مرکز سطح (plan) پر کسی بھی جگہ ہوسکتا ہے۔ اس کے لیے کسی شکل میں کونے (vertex) کا ہونا شرط نہیں۔ اکثر طلبہ سمجھتے ہیں کہ توسیع (enlargment) کا مطلب صرف بڑا کرنا ہے لہٰذا اس بات پر زور دیتے ہوتے انھیں سمجھایئے کہ اگر اسکیل فیکٹر 1 سے کم ہو تو تصویر (image) ہمیشہ چھوٹی ہو جاتی ہے اب آپ درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کی مدد سے طلبہ کو image کی توسیع کا عمل مرحلہ وار وضاحت سے سمجھایئے۔

Unit 10 # Measurement

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- State the Pythagoras theorem and use it to solve right-angled triangles



Stimulus: The outcome of this competency depends on the student's ability to understand the relationship between the sides of a right-angle triangle. Revise with students that a right-angled triangle has one angle exactly 90º. The side opposite the right-angle is called the hypotenuse. It is the longest side. The side opposite the given angle in a right-angle triangle is called the perpendicular, and the side adjacent to the angle formed by the hypotenuse and perpendicular is the base.

Move on to explaining to the students what Pythagoras' theorem is. The theorem states that in a right-angled triangle, the square of the hypotenuse is equal to the sum of square of two other sides. So, in triangle ABC, if ACB = 90º, in the triangle, *c* represents the hypotenuse, *a* is the base, and *b* is the perpendicular. Thus, according to Pythagoras' theorem:

$$(\text{hypotenuse})^2 = (\text{base})^2 + (\text{perpendicular})^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Students may make the mistake of misrecognising the hypotenuse; therefore, it is necessary to emphasise that the hypotenuse is the longest side of the triangle which is across the right-angle. They may also apply the theorem to any triangle, so point out to the students that Pythagoras' theorem is only limited to the right-angled triangle. Move on to carrying out a fun activity in the class to help students with the theorem. Furthermore, inform the students that the theorem can be manipulated to find the length of any side of the right-angle triangle. Use exercise from the textbook to help students strengthen their competency.

Competency 2:

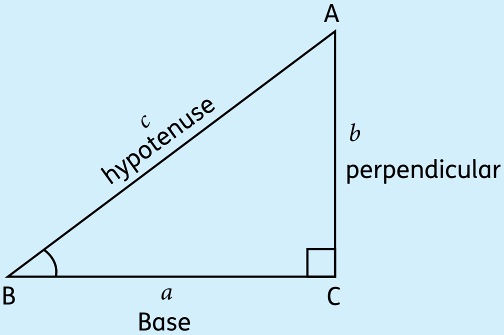
- Describe a chord, arcs, major and minor arc, semi-circle, segment of a circle, sector, central angle, secant, tangent, and concentric circle
- Calculate the arc length and the area of the sector of a circle

Stimulus: This competency requires students to correctly identify the different parts of a circle. Begin the lesson by asking the students to identify different circular objects in the classroom or in everyday life. Next, ask them what a circle is. They are more likely to say 'a closed 2D shape that has

قابلیت ۱

- Pythagoras theorem کو بیان کرسکیں اور اسے قائمۃ الزاویہ مثلث (right-angled triangles) کو حل کرنے کے لیے استعمال کرسکیں۔

محرک: اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کی اس صلاحیت پر منحصر ہے کہ وہ قائمۃ الزاویہ مثلث (right-angled triangle) میں اطراف (sides) کے درمیان تعلق کو کس حد تک سمجھتے ہیں اب طلبہ کے ساتھ مل کر دہرایئے کہ قائمۃ الزاویہ مثلث ایک ایسا مثلث ہے جس کا ایک زاویہ 90° درجے کا ہوتا ہے اس زاویے کی مخالف سائیڈ کو وتر (hypotenuse) کہتے ہیں جو مثلث میں سب سے لمبی ہوتی ہے دیے گئے زاویے کی مخالف سمت کو (perpendicular) کہا جاتا ہے۔ وتر (hypotenuse) اور عمود (perpendicular) کے درمیان بننے والے زاویے کے سامنے والی side کو قاعدہ (base) کہتے ہیں۔



اب مسئلہ فیثا غورث pythagorus theorum کو وضاحت کے ساتھ بیان کرتے ہوئے طلبہ کو بتائیے کہ اس کے تحت ”ایک قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر (hypotenuse) کی لمبائی کا مربع برابر ہوتا ہے باقی دو اطراف کے مربعوں کے مجموعے کے، لہٰذا مثلث ABC میں اگر ACB = 90° ہو تو مثلث میں C وتر (hypotenuse) کو، a قاعدہ (base) کو اور b عمود (perpendicular) کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں فیثا غورث تھیورم کے مطابق:

$$(\text{hypotenuse})^2 = (\text{base})^2 + (\text{perpendicular})^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

طلبہ اکثر وتر (hypotenuse) کو پہچاننے میں غلطی کرتے ہیں لہٰذا اس نکتے پر زور دیجیے کہ وتر (hypotenuse) مثلث میں سب سے لمبی side ہے اور یہ ہمیشہ زاویہ قائمہ کے سامنے واقع ہوتی ہے۔ طلبہ اس تھیورم کو کسی بھی مثلث پر لاگو کرنے کی غلطی کر سکتے ہیں لہٰذا انھیں یہ سمجھایئے کہ یہ تھیورم صرف قائمۃ الزاویہ مثلث کے لیے مخصوص ہے۔ اب آپ کمرۂ جماعت میں ایک دلچسپ سرگرمی کروایئے تاکہ طلبہ کو فیثا غورث کے نظریے کو بہ آسانی سمجھ سکیں۔ مزید برآں طلبہ کو آگاہ کیجیے کہ وہ اس تھیورم کو قائمۃ الزاویہ مثلث میں کسی بھی لمبائی کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ طلبہ کو اس قابلیت میں مہارت دینے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مشقوں کو کروایئے۔

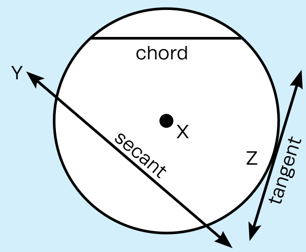
قابلیت ۲

- ایک دائرے میں chord، arcs (major arc and minor arcs)، semi-circle segment of circle کو بیان کرسکیں۔
- arc length اور area of the sector of a circle کو calculate کرسکیں۔

محرک: اس قابلیت کے لیے ضروری ہے کہ طلبہ دائرے کے مختلف حصوں کو بہ خوبی پہچانتے ہوں۔ سبق کا آغاز کرتے ہوئے طلبہ سے جماعت میں یا روزمرہ زندگی میں موجود گول اشیا کی شناخت کرنے کے لیے کہیں۔ پھر ان سے پوچھیے کہ دائرہ کسے کہتے ہیں۔ ان کی اکثریت کا جواب ہوگا۔ ایک بند دو ابعادی 2D شکل جس کے کونے اور اطراف نہیں ہوتے، اس جماعت کے طلبہ کے لیے یہ تعریف ذرا مختلف ہے یعنی ایک مخصوص سطح پر ایک مقررہ نقطہ

no corners or sides'. In this grade, the definition of circle is a little different, that is a circle is defined as a path of all the points that are equidistant from a fixed point on a given surface. This fixed point is the centre of the circle and the constant distance of the path from the centre of the circle is called the radius. Emphasise the phrase 'on the surface' because a circle is a 2D plane figure that does not occupy any space, and removing this phrase would make it a sphere. To demonstrate the definition of circle, bring a stone to the class and tie it to one end of the string. Holding the other end of the string, swing it in the air. Point out to the students that the path carved by the stone is a circle. This path will always be curved as the distance between the stone, and your hand is constant.

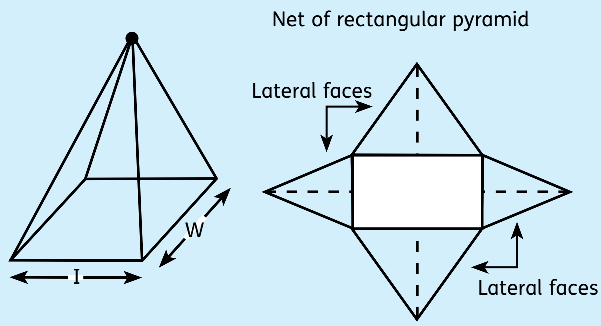
Move on to explaining the different parts of the circle using the text from the textbook. Clarify to the students that while the chord, secant, and tangent are lines touching the circle, they are very different. A chord connects two points of the circle, while the secant intersects the circle at two points, and a tangent touches the circle at exactly one point. You may use a cut-out circle and a thread to physically demonstrate the three parts of the circle. Furthermore, point out that arcs are not always half a circle. Differentiate between major and minor arc and a semicircle. You may use different coloured segments to show arcs of various sizes. Similarly, students often get confused between a sector and a segment; therefore, you may bring a cut-out of a pizza slice to demonstrate that while an entire pizza slice is a sector, a part of the pizza with its crust is a segment. Once the students are clear on all parts of a circle, move on to introducing formula for arc length and sector area. Move on to completing the exercise from the book to help the students gain strength in this competency.



Competency 3:

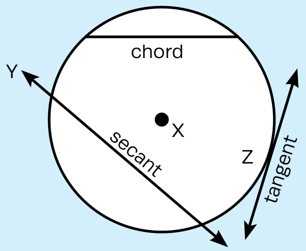
- Calculate the surface area and volume of the pyramid, sphere, hemisphere, and cone

Stimulus: Students have prior knowledge of what surface area and volume are. Begin the lesson by recalling with the students what a pyramid is. Use nets of a pyramid to help the students understand the characteristics of a pyramid. Also explain that the base of a pyramid determines its type. For example, if the base of a pyramid is a triangle, it is a triangular pyramid. If the base is a square, it is a square pyramid and if the base is an octagon, it is an octagonal pyramid. Introduce the formula for the volume and surface area of a square pyramid. The formula can be manipulated to find different unknown values, such as the length or height in case of volume, and the area of each square or triangle in the case of surface area. This Translate an object and give precise description of transformation.



(fixed point) سے برابر فاصلے (equidistant) پر موجود تمام نقاط کی راہ کو دائرہ کہتے ہیں یعنی ایک دائرہ ان تمام نقاط کے راستے کے طور پر بیان کیا جاتا ہے جو کسی مخصوص سطح پر ایک مقررہ نقطے (fixed point) سے مساوی فاصلے پر ہوتے ہیں۔ یہ مقررہ نقطہ دائرے کا مرکز (centre) ہے اور دائرے کے مرکز سے راستے کا مستقل فاصلہ رداس (radius) کہلاتا ہے۔ وضاحت کے دوران 'سطح پر' on the surface کے فقرے پر زور دیجیے کیونکہ دائرہ ایک دوابعادی (2D) شکل ہے جو کوئی جگہ نہیں گھیرتی۔ اگر یہ فقرہ نکال دیا جائے تو یہ تعریف کرّے (sphere) پر لاگو ہو جائے گی جو ایک سہ ابعادی (3D) شکل ہے۔

دائرے کی وضاحت کے لیے ایک عملی مظاہرہ کیجیے جماعت میں اپنے ساتھ ایک پتھر لائیں اور اسے ایک دھاگے کے سرے سے مضبوطی سے باندھ دیجیے اب دھاگے کے دوسرے سرے کو ہاتھ میں پکڑ کر پتھر کو ہوا میں گھمائیں طلبہ کو بتائیے کہ پتھر کے گھومنے سے جو راہ بنتی ہے وہ ایک دائرہ ہے یہ راہ ہمیشہ خمیدہ (curved) ہو گی کیونکہ پتھر اور آپ کے ہاتھ کے درمیان فاصلہ مستقل (constant) ہے۔

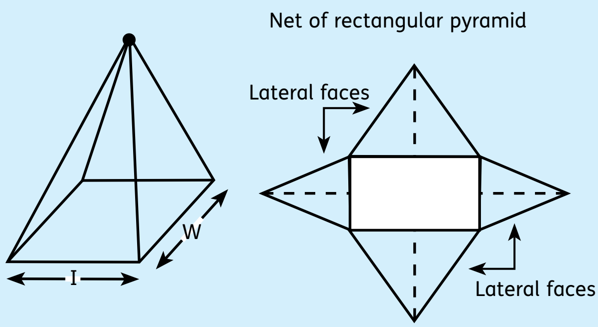


درسی کتاب کا متن استعمال کرتے ہوئے دائرے کے مختلف حصوں (parts) کو وضاحت سے بیان کیجیے۔ طلبہ کو بتائیے کہ chord، secant اور tangent تینوں ہی دائرے کو چھوتی ہیں لیکن ان کے درمیان فرق ہے۔ ایک chord دائرے کے دو نقاط کو آپس میں جوڑنے والی سیدھی لکیر ہے جب کہ secant وہ لکیر ہے جو دائرے کو دو نقاط پر کاٹتی ہے اور tangent وہ لکیر ہے جو دائرے کو صرف ایک نقطے (point) کو چھوتی ہے آپ دائرے کے کٹ آؤٹ اور ایک دھاگے کی مدد سے ان تینوں parts کو عملی طور پر دکھا سکتے ہیں۔ اب طلبہ کو سمجھائیے کہ arcs ہمیشہ نصف دائرہ نہیں ہوتا۔ major arc اور minor arc اور semi circle کے درمیان فرق کو سمجھائیے۔ آپ مختلف arc دکھانے کے لیے سائز کے مختلف رنگوں کے حصے استعمال کر سکتے ہیں۔ اسی طرح طلبہ اکثر sector اور segment کے درمیان الجھ کر فرق نہیں کر پاتے لہٰذا آپ pizza کے ٹکڑوں (slices) کی مدد سے اس فرق کو بہ آسانی سمجھا سکتے ہیں جماعت میں طلبہ کو pizza سلائس دکھائیے اور بتائیے کہ یہ ایک sector ہے pizza کے وہ part اور جس میں صرف اس کی crust ہو وہ segment ہے جب طلبہ دائرے کے حصوں کو واضح طور پر جان جائیں تو آپ انھیں arc length اور sector area کے فارمولے متعارف کروائیے۔ اس قابلیت پر عبور حاصل کرنے کے لیے طلبہ کو درسی کتاب میں دی گئی مشقوں کو مکمل کروائیے۔

قابلیت ۳

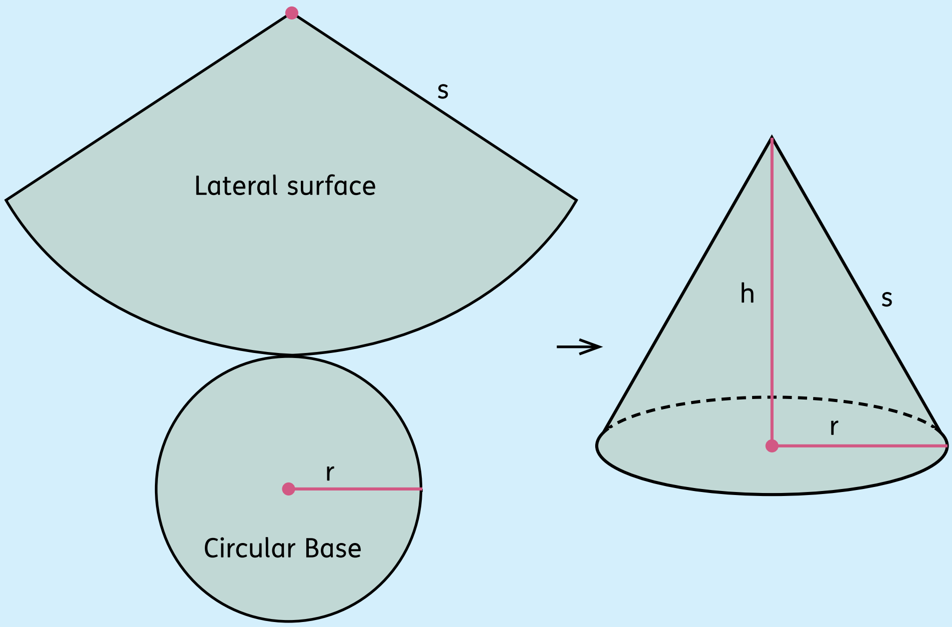
- pyramid ، کرہ (sphere)، نصف کرہ (hemisphere) اور شنک (cone) کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کر سکیں۔

محرک: طلبہ پہلے سے surface area اور volume کا علم رکھتے ہیں۔ سبق کا آغاز اس بات کا اعادہ کرتے ہوئے کیجیے کہ pyramid کیا ہوتا ہے۔ طلبہ کو pyramid کی net (جال نما خاکہ) دکھا کر اس کی خصوصیات سمجھائیے pyramid کی ایک base ہوتی ہے جو pyramid کی قسم کا تعین کرتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر pyramid کی base مثلث ہو تو اسے triangular pyramid کہتے ہیں اگر base مربع ہو تو اسے square pyramid کہتے ہیں اگر base آٹھ کونوں والی (octagone) ہو تو اسے octagonal pyramid کہتے ہیں۔ طلبہ کو اب مربع pyramid کے حجم (volume) اور surface area کے فارمولوں سے متعارف کروائیے۔

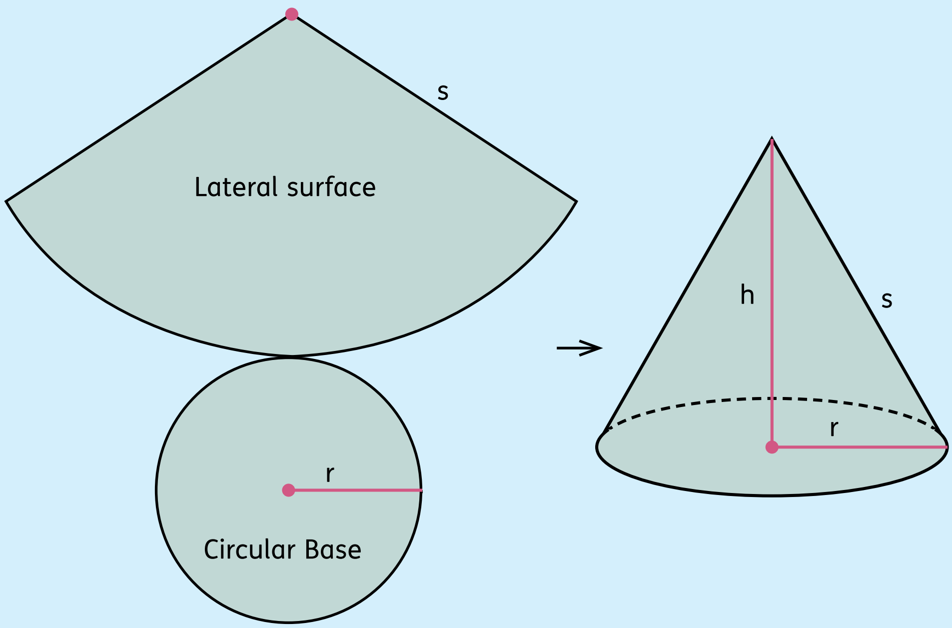


ان فارمولوں کو مختلف نامعلوم مقداروں جیسے حجم کے معاملے میں لمبائی یا اونچائی اور سطح کے رقبے میں ہر مربع یا مثلث کا رقبہ وغیرہ کو معلوم کرنے کے

competency is rather simple and requires students to use the known formula for solving problems. Move on to explaining how to calculate the surface area and volume of a sphere, hemisphere, and cone. Using the textbook, explain the characteristics of 3D objects and their formulas. Look out for common misconceptions that develop in students. When explaining cones/pyramids, mention that the slant height of the cone/pyramid is different from the vertical height of the cone/pyramid as students often get confused between the two. The best way to remove this confusion is by using nets of 3D objects. Secondly, emphasise to the students regarding the difference between curved and total surface area when calculating the surface area of hemispheres and cones. Use different examples and exercises form the textbook as guided and independent practice for students to gain mastery in this competency.



لیےمعمولی ردوبدل کر کے ضرورت کے مطابق ڈھالا جا سکتا ہے۔ اس قابلیت کو سیکھنا نسبتاً آسان ہے اور طلبہ کو صرف معلوم فارمولے کو استعمال کرتے ہوئے عبارتی سوالات کو حل کرنا ہوتا ہے۔ اب طلبہ کو کرّہ (sphere)، نصف کرّہ (hemisphere) اور مخروطی شکل (cones) کے سطحی رقبے اور حجم (volume) کو معلوم کرنا بتایئے اس کے لیے درسی کتاب کا استعمال کیجیے تا کہ طلبہ کو سہ ابعادی (3D) اشکال کی خصوصیات اور ان کے فارمولے وضاحت کے ساتھ سمجھ میں آسکیں۔ طلبہ میں پیدا ہونے والی غلط فہمیوں پر بھی نظر رکھیے۔ cone کی height کی وضاحت کرتے وقت اس نکتے پر زور دیجیے کہ مخروطی شکل کی ترچھی اونچائی pyramid کی عمودی اونچائی سے مختلف ہے طلبہ میں پائی جانے والی اس الجھن کو دور کرنے کا بہترین طریقہ سہ ابعادی 3D اشیا کے net کا استعمال ہے۔ دوسری اہم بات جو طلبہ کو سمجھانی ضروری ہے وہ curved اور total surface area کا فرق ہے خصوصاً hemisphere اور cones میں سطحی رقبے (total surface area) کا حساب لگاتے وقت اس فرق کو ذہن میں رکھنا چاہیے۔ اس قابلیت میں مہارت پیدا کرنے کے لیے طلبہ کو درسی کتاب میں دی گئی مشقیں اور مثالیں اپنی نگرانی میں اور کچھ انھیں خود سے کرنے کا موقع دیجیے۔



Unit 11

Data Handling

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Recognise the difference between discrete, continuous, grouped, and ungrouped data
- Select and justify the most appropriate graph(s) for a given data set and draw simple conclusions based on the shape of the graph
- Construct frequency distribution tables, histograms, (of equal widths) and frequency polygons and solve related real-world problems

Stimulus: Students have prior knowledge of data and data is represented and interpreted in the form of different graphs and charts. Revise with students that data can be in the form of numbers, pictures, symbols, etc. Then recall with the students what different types of data are – discrete, continuous, grouped, and ungrouped. State the difference between discrete and continuous data, that is the values of discrete data are distinct, like the number of students in a school or the number of cars parking in a parking lot. Whereas continuous data is measured on a scale and can have infinite values, like the height or weight of the students in a school or class. Throughout the lesson, emphasise why there is a need to sort data.

Now ask them if they remember what grouped and ungrouped data are. Recall with them the difference between grouped and ungrouped data, that is any collected data

12, 30, 25, 41, 33, 20, 17, 45, 40, 31, 36, 19, 16, 34, 12, 40, 36, 36, 44, 38
37, 22, 18, 30, 24, 36, 34, 44, 41, 37, 27, 40, 39, 20, 23, 39, 37, 40, 39, 30

arranged in a particular way is grouped data. Whereas ungrouped is not organised. In this grade, students will be working on organising ungrouped data and then using it. For organisation of any ungrouped data, it needs to be organised in ascending order and then in a tabular form. For example, there are 30 students in the class and their marks (out of 50) were collectively written as:

The above information is difficult to interpret and is not capable of being analysed fully. Therefore, it first needs to be organised in ascending order.

The ordered data can now help us understand a lot of points:

12, 12, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 30, 30, 30, 31, 33, 34, 34
36, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 44, 44, 45

- The lowest marks obtained were 12.
- The highest marks obtained were 45.
- The range of marks obtained by the students were 12-45.

باب
۱۱

شماریات

قابلیت ا

- غیر مسلسل (discrete)، مسلسل (continous) grouped اور ungrouped ڈیٹا میں فرق کر سکیں۔
- کسی دیے گئے ڈیٹا سیٹ کے لیے موزوں ترین گراف کا انتخاب کریں اور اس کا جواز پیش کریں اور اس گراف کی شکل کی بنیاد پر نتائج اخذ کر سکیں۔
- فریکوئنسی ڈسٹری بیوشن ٹیبلز، ہسٹو گرام (برابر چوڑائی کے) اور فریکوئنسی پولی گان بنائیں اور اس سے متعلقہ روزمرہ زندگی سے جڑے عبارتی سوالوں کو حل کر سکیں۔

محرک: طلبہ ڈیٹا کو پہلے سے جانتے ہیں آپ کو صرف انھیں ایک بار یاد دلانا ہو گا کہ ڈیٹا کو مختلف گراف اور چارٹ کی شکل میں پیش کیا اور سمجھا جاتا ہے۔ اب طلبہ کے ساتھ نظر ثانی کیجیے کہ ڈیٹا اعداد تصاویر، علامتوں وغیرہ کی شکل میں ہوسکتا ہے۔ بیان کیجیے کہ ڈیٹا کی مختلف اقسام کیا ہیں یعنی غیر مسلسل یا مجرد (discrete)، مسلسل (continous) groups اور ungrouped پھر discrete اور continous ڈیٹا کے درمیان فرق کی وضاحت کیجیے یعنی discrete ڈیٹا کی قدریں (values) الگ الگ ہوتی ہیں جیسے کہ اسکول میں طلبہ کی تعداد یا پارکنگ میں کھڑی گاڑیوں کی تعداد جب کہ مسلسل ڈیٹا کو کسی پیمانے پر ناپا جاتا ہے اور یہ infinite values میں ہوسکتا ہے جیسے اسکول یا جماعت میں طلبہ کا قد اور ان کا وزن وغیرہ سبق کے دوران اس بات پر توجہ مرکوز رکھیے کہ آخر ڈیٹا کو ترتیب دینا کیوں ضروری ہے؟

اب طلبہ سے پوچھیے کہ کیا انھیں یاد ہے کہ grouped اور ungrouped ڈیٹا کیا ہوتا ہے پھر ان کے ساتھ مل کر ان دونوں اقسام کے ڈیٹا میں پائے جانے والے فرق کو دہرایئے۔ گروپ (group) ڈیٹا سے مراد ایسا ڈیٹا ہے جو کسی خاص ترتیب یا group میں منظم کیا گیا ہو جب کہ ungrouped ڈیٹا وہ ہے جو بے ترتیب ہو اس جماعت میں طلبہ ungrouped ڈیٹا کو ترتیب دینا سیکھیں گے اور پھر اس کا استعمال کریں گے ایسے ڈیٹا کو منظم کرنے کے لیے پہلے اسے صعودی ترتیب (acending order) یعنی چھوٹے سے بڑے کی ترتیب میں لکھا جاتا ہے اور پھر جدول (table) کی شکل میں پیش کیا جاتا ہے۔مثال کے طور پر اگر جماعت میں 30 طلبہ ہیں اور ان کے نمبر (50 میں سے) درج ذیل ہیں تو انھیں مجموعی طور پر یوں لکھا جائے گا:

12, 30, 25, 41, 33, 20, 17, 45, 40, 31, 36, 19, 16, 34, 12, 40, 36, 36, 44, 38
37, 22, 18, 30, 24, 36, 34, 44, 41, 37, 27, 40, 39, 20, 23, 39, 37, 40, 39, 30

مذکورہ بالا معلومات کو سمجھنا دشوار ہے اور نہ ہی اس کا تجزیہ کرنا آسان ہے لہٰذا اسے سب سے پہلے صعودی ترتیب (ascending order) میں لکھنا ضروری ہے۔

منظم ڈیٹا بہت سے نکات کو سمجھنے میں مدد دیتا ہے:

12, 12, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 30, 30, 30, 31, 33, 34, 34
36, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 44, 44, 45

- حاصل کردہ سب سے کم نمبر 12 تھے۔
- حاصل کردہ سب سے زیادہ نمبر 45 تھے۔
- طلبہ کے حاصل کردہ نمبروں کی حد (range) 12–45 تھے۔

The data can then be further analysed in tabular form for using tally marks.

Marks	Tally	Frequency
11-20		8
21-30		8
31-40		19
41-50		5

The first column of the table is the class interval which is the range of data divided into classes to help analyse the data better. A class has an upper limit (highest value) and a lower limit (lowest value). Frequency is the number of times a data value appears in an interval. Such a table is called the frequency distribution table.

In the above data, the highest marks obtained were 45 and the lowest marks obtained were 12. The data is spread between these two numbers. The spread of data is called the range of data. It is obtained by subtracting the lowest value from the highest value. The range of the above data set is: 45 – 12 = 33. Students often tend to create wrong class intervals, therefore, it is necessary for them to arrange the data first and then find the highest and lowest data value. Once the data is collected and organised, the most appropriate graph is selected to represent data. The following table summarises the appropriate graphs and the reason for using it:

Data type	Appropriate graph	Reason
Categorical data	Pie chart and bar graph	To show the frequency of categories
Discrete data	Bar charts and histogram	To show distribution of data across a data set.
Continuous data	Line graphs and histogram	To show distribution of data across a data set and trends

Once the students understand the data types and how to choose appropriate graph, explain to the students the difference between frequency polygons and histogram. Use the text from the textbook to help the students understand the difference.

The students now understand how to develop frequency distribution tables. These tables will now be used further to draw frequency polygons. A frequency polygon is a graphical form to depict the shape of the data and trends. It is usually drawn with the help of a histogram. A histogram is first drawn using rectangular bars against the given class intervals. After this, the midpoints of the bars are joined to obtain the frequency polygon. The midpoint of each bar is calculated by dividing the sum of upper- and lower-class limit by 2. Use the examples and exercises from the book to help students strengthen their understanding of this competency.

اس کے بعد ٹیبل میں دیے گئے اعداد و شمار کا مزید تجزیہ کرنے کے لیے ٹیلی مارکس کو استعمال کیا جا سکتا ہے:

Marks نمبر	Tally ٹیلی	Frequency فریکوئنسی
11-20		8
21-30		8
31-40		19
41-50		5

جدول کا پہلا کالم وقفہ (class interval) کہلاتا ہے جو ڈیٹا کی حد (range) کو بہتر انداز میں تجزیہ کرنے کے لیے مختلف کلاسز میں تقسیم کرتا ہے۔ ہر کلاس کی ایک بالائی حد (upper limit) یعنی highest value اور زیریں حد (lower limit) lowest value ہوتی ہے۔ فریکوئنسی ظاہر کرتی ہے کہ کوئی value کسی خاص وقفے میں ڈیٹا میں کتنی بار آئی ہے۔ ایسا جدول (table) فریکوئنسی ڈسٹری بیوشن ٹیبل کہلاتا ہے۔

درج بالا اعداد و شمار (Data) میں سب سے زیادہ حاصل کردہ نمبر 45 تھے اور سب کم نمبر 12 تھے ڈیٹا ان دونوں نمبروں کے درمیان پھیلا ہوا ہے۔ ڈیٹا کے پھیلاؤ (speed) کو حد (range) کہتے ہیں یہ سب سے زیادہ حاصل کردہ نمبروں یا highest value کو lowest value میں سے منہا کر کے معلوم کیا جاتا ہے۔ مذکورہ بالا ڈیٹا سیٹ کی حد ہے: 45 - 12 = 33۔ اکثر طلبہ غلط کلاس انٹرویل بناتے ہیں اس لیے ضروری ہے کہ پہلے وہ ڈیٹا کو ترتیب دیں اور پھر اس میں سب سے زیادہ اور سب سے کم value کو تلاش کریں۔ ڈیٹا کو منظم کرنے کے بعد ڈیٹا کو ظاہر کرنے کے لیے موزوں ترین گراف کا انتخاب کیا جاتا ہے۔ درج ذیل جدول میں مختلف گراف اور ان کے استعمال کی وجوہات کا خلاصہ دیا گیا ہے۔

Data کی قسم	موزوں ترین گراف	وجوہات
Categorical data	Pie چارٹ اور بار گراف	زمروں کی فریکوئنسی دکھانے کے لیے
Discrete data	بار چارٹس اور ہسٹو گرام	ڈیٹا سیٹ میں ڈیٹا کی تقسیم دکھانے کے لیے
Continuous data	لائن گراف اور ہسٹو گرام	ڈیٹا سیٹ اور رجحانات میں ڈیٹا کی تقسیم دکھانے کے لیے

طلبہ کو جب ڈیٹا کی اقسام اور موزوں ترین گراف کا انتخاب کرنا سمجھ میں آجائے تو وضاحت سے بیان کریں کہ ہسٹو گرام اور فریکوئنسی پولیگان کے درمیان کیا فرق ہے۔ درسی کتاب میں دیے گئے متن کی مدد سے اس فرق کو سمجھنے میں طلبہ کی مدد کیجیے۔

طلبہ جان چکے ہیں کہ فریکوئنسی ٹیبل کو کیسے بنایا جاتا ہے اب ان جدولوں (tables) کو وہ فریکوئنسی پولیگان کو بنانے کے لیے استعمال کرنا سیکھیں گے۔ فریکوئنسی پولیگان ایک ایسی گرافیکل شکل ہے جو ڈیٹا کی شکل اور رجحانات (trends) کو ظاہر کرتی ہے یہ عام طور پر ہسٹو گرام کی مدد سے بنایا جاتا ہے۔

ہسٹو گرام میں ہر کلاس انٹرویل کے لیے ایک مستطیل بار (rectangular bar) بنایا جاتا ہے اس کے بعد bars کے درمیان نقاط (mid points) کو جوڑ کر فریکوئنسی پولیگان کو حاصل کیا جاتا ہے۔ ہر bar کے درمیانی نقطے (mid point) کو calculate کرنے کے لیے upper اور lower class کی حد (range) کے مجموعے (sum) کو 2 پر تقسیم کر دیا جاتا ہے۔ اس قابلیت میں طلبہ کو پختہ کرنے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو کروائیے۔

Competency 2:

- Calculate range, variance, and standard deviation for ungrouped data

Stimulus: This competency is fairly new for the students as it is a new concept. Students have previously studied measures of central tendency, which describes the middle value of a data set. However, the dispersion of data is known using standard deviation. Begin the lesson with writing two datasets on the board.

50, 100, 150   98, 100, 102

Now, ask the students to calculate the mean and median of both the data sets. The students are likely to answer 100 as both. Now, ask the students what the difference between the two data sets is. Once they answer, explain to them that the first dataset has a greater range and is more widespread, that is deviates, than the second dataset. This measure of spread is calculated using a statistical tool called standard deviation. It is denoted by sigma (σ).

The range of a data set does not describe the variance amongst the variables. To find it, variance is calculated. The variance is evaluated from the mean of a dataset. Point out to the students that the deviation can be positive or negative, therefore it is first squared to ensure that the positive and negative values do not cancel one another during addition.

Variance = $\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$ – Mean^2

For example, to find the variance of the ungrouped data: 5, 12, 3, 18, 6, 8, 2, 10, we first find the mean of the data set and then square it.

X	X^2
2	4
3	9
5	25
6	36
8	64
10	100
12	144
18	324

Mean = $\frac{\sum x}{n} = \frac{64}{8} = 8 = 8^2 = 64$.

Next, all the observations are squared, x^2 and all the squared observations are added, that is, $\sum x^2 = 706$. Next, this sum is divided by the total number of observations, n.

$= (\frac{\sum x^2}{n}) = \frac{706}{8} = 88.25$

The quotient is subtracted from the squared mean to calculate variance.

Variance = $(\frac{\sum x^2}{n})$ – Mean^2

$= 88.25 - 64$

$= 24.25$

Move on to explaining to the students that standard deviation is actually the square root of variance, so $\sqrt{24.25 = 4.9}$.

Emphasise to the students that variance and standard deviation are two separate calculations. While variance is the average of squared deviations, standard deviation is its square root. Using the examples and exercise from the textbook, help the students gain mastery in this competency.

قابلیت ۲

- ungrouped data کے لیے range، variance اور standard deviation کا حساب لگا سکیں۔

محرک: یہ قابلیت طلبہ کے لیے نئی ہے کیونکہ یہ ایک نیا تصور ہے طلبہ نے اس سے قبل مرکزی رجحان کے اقدامات measures of central tendeacy کا مطالعہ کیا ہے۔ جو ڈیٹا سیٹ کی درمیانی قدر middle value کو بیان کرتا ہے۔ تاہم اب وہ ڈیٹا کے پھیلاؤ کو سمجھنے کے لیے standard deviation کا استعمال کریں گے۔سبق کے آغاز میں بورڈ پر دو ڈیٹا سیٹ لکھیے۔

50, 100, 150 98, 100, 102

اب طلبہ سے کہیں کہ وہ ان دونوں ڈیٹا سیٹ کے mean اور median معلوم کریں۔ زیادہ تر طلبہ کا جواب دونوں کے لیے 100 ہو گا۔ اب پوچھیے کہ ان دونوں data set کے درمیان کیا فرق ہے جب وہ جواب دے چکیں تو انھیں واضح طور پر بتایئے کہ پہلے ڈیٹا سیٹ کی حد زیادہ ہے اور یہ زیادہ پھیلا ہوا ہے یعنی دوسرے ڈیٹا سیٹ کے مقابلے میں انحراف ہے۔ پھیلاؤ کی پیائش کو calculate کرنے کے لیے ایک شماریاتی آلہ (statistic tool) استعمال ہوتا ہے جس کو standard deviation کہتے ہیں اسے سگما (σ) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ڈیٹا سیٹ کی range، متغیرات کے درمیان تغیر (variance) کا فرق کو بیان نہیں کرتی ہے لہٰذا اسے معلوم کرنے کے لیے تغیر (variance) کا حساب لگایا جاتا ہے تغیر variance کا اندازہ ڈیٹا سیٹ کے means کیا جاتا ہے طلبہ کو سمجھایئے کہ deviation مثبت یا منفی ہوسکتا ہے اس لیے سے پہلے اسے square کیا جاتا ہے تاکہ مثبت اور منفی values جمع کرنے کے دوران ایک دوسرے کو منسوخ نہ کرسکیں۔

$$\text{Variance} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n - 1} - \text{Mean}^2$$

مثال کے طور پر ungrouped ڈیٹا کا تغیر (variance) معلوم کرنے کے لیے 5، 12، 3، 18، 6، 8، 2، 10، ہم پہلے ڈیٹا سیٹ کا اوسط (mean) معلوم کریں گے پھر اسے مربع (square) کریں گے۔

X	X^2
2	4
3	9
5	25
6	36
8	64
10	100
12	144
18	324

$$\text{Mean} = \frac{\sum x}{n} = \frac{64}{8} = 8 = 8^2 = 64.$$

اب variance کو calculate کرنے کے لیے ہم quotient کو squared mean میں سے منہا کریں گے۔

$$\text{Variance} = \left(\frac{\sum x^2}{n}\right) - \text{Mean}^2$$
$$= 88.25 - 64$$
$$= 24.25$$

طلبہ کو بتایئے کہ معیاری انحراف (standard deviation) دراصل تغیر (variance) کا جذرالمربع (square root) ہے۔

لہٰذا $\sqrt{24.25 = 4.9}$

اس بات کو واضح طور پر طلبہ کو سمجھایئے کہ variance اور standard deviation دو مختلف الگ الگ شماریاتی حسابات (calculations) ہیں۔ جب کہ تغیر (variance) دراصل squared deviations کا average اور standard deviation اس کا جذرالمربع (square root) ہے۔ درسی کتاب میں دی گئی مشقوں اور مثالوں کی مدد سے طلبہ کو اس قابلیت پر عبور دلوایئے۔

Competency 3:

- Explain and compute the probability of mutually exclusive, independent, simple combined, and equally likely events.
- Perform probability experiments to estimate the probability of a simple event.
- Compare experimental and theoretical probability in simple events.

Stimulus: Students are familiar with the idea of probability and the terms associated with it. Recall with the students that probability is the likelihood of an event happening. The scale of probability ranges from 0 to 1, where 0 is impossible and 1 is certain. When a coin is flipped, the probability of getting either heads or tails is equally likely to happen. To calculate theoretical probability of an event, the number of favourable outcomes is divided by the number of all possible outcomes. So, the probability of getting heads or tails is ½. Go through the following key terms of probability:

Outcome	A single possible result of an experiment
Event	Set of one or more outcomes
Sample space	Set of all possible outcomes of an experiment
Experiment	A procedure that can be infinitely repeated and has a well-defined set of possible outcomes
Combined events	Two or more experiments that are conducted together. These experiments can either be repeated or involve two or more objects
Equally likely event	Equal chances of an event happening

In the case of combined events, such as tossing two or more coins, or rolling two or more dice, the sample space contains multiple outcomes. This sample space can be determined using two methods: a possibility diagram and a tree diagram.

Move on to explaining to the students how both methods are used. A possibility diagram shows information about events in a more structed manner, that is in the form of rows and columns. The possibility diagram for flipping two coins at the same time is:

		Coin I	
		H	T
	H	HH	HT
Coin 2	T	TH	TT

This diagram shows that the sample space for two coins flipping is: HH, HT, TH, TT. Similarly, the possibility diagram of two dice rolling is:

قابلیت ۳

- mutually exclusive، independent، simple combined اور equally likely events کے امکان کو بیان کریں اور ان کو معلوم کرسکیں۔
- ایک simple events کے امکان کا اندازہ لگانے کے لیے probability experiments کرسکیں۔
- simple event میں تجرباتی (experimental) اور نظریاتی امکان (theoretical probability) کا موازنہ کرسکیں۔

محرک: طلبہ پہلے سے امکان کے خیال (idea of probability) اور اس سے وابستہ اصطلاحات سے واقف ہیں۔ طلبہ ساتھ مل کر اعادہ کیجیے کہ probability دراصل event کے رونما ہونے کا امکان ہے probability ranges کا پیمانہ 0 سے 1 تک ہے جہاں 0 کا مطلب ناممکن (impossible) اور 1 یقینی (certain)۔ جب کسی سکّے (coin) کو اچھالا جاتا ہے تو سیدھا (head) یا الٹا (tail) کے آنے کے امکانات برابر ہوتے ہیں۔ کسی event کی theoretical probability کو calculate کرنے کے لیے، سازگار نتائج کی تعداد کو تمام ممکنہ نتائج سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ لہٰذا سیدھا (head) یا الٹا (tail) آنے کا امکان 1/2 ہے۔ درج ذیل امکان کی key term پر غور کیجیے:

Outcome	کسی تجربے کا ایک خاص نتیجہ
Event	ایک یا ایک سے زیادہ نتائج کا مجموعہ (set)
Sample space	تجربے کے تمام نتائج کا مجموعہ (set)
Experiment	ایسا طریقہ کار جسے لامحدود بار دہرایا جا سکے اور جس کے ممکنہ نتائج واضح طور پر متعین ہوں۔
Combined events	دو یا زیادہ تجربات جو ایک ساتھ کیے جائیں یہ تجربات یا تو دہرائے جاسکتے ہیں یا دو یا زیادہ اشیا پر مشتمل ہو سکتے ہیں۔
Equally likely event	کسی event کے رونما ہونے کے یکساں امکانات

مشترکہ واقعات (events) کی صورت میں جیسے سکّے کا اچھالنا، چھکّا (Dice) پھینکنا تو sample space میں کئی ممکنہ نتائج شامل ہوتے ہیں۔
sample space کا تعین دو طریقوں سے کیا جا سکتا ہے: امکانی خاکہ possibility diagram اور tree diagram۔
اب طلبہ کو ان دونوں طریقوں کو استعمال کرنا سکھایئے۔ ایک امکانی خاکے میں معلومات کو rows اور کالموں کی شکل میں منظم انداز میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر دو سکّوں کو ایک ساتھ اچھالتے ہیں تو امکانی خاکہ possibility diagram کچھ یوں ہو گا:

Coin I

	H	T
Coin 2 H	HH	HT
T	TH	TT

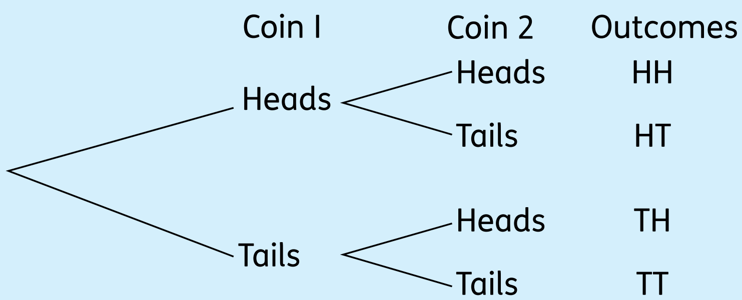
مذکورہ بالا خاکہ ظاہر کرتا ہے کہ دو سکّے پلٹنے کے لیے sample space یہ ہے HH، HT، TH، TT۔ بالکل اسی طرح ڈائس رولنگ کا امکانی خاکہ (possibility diagram) یہ ہے:

Dice 2						
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
4	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6 MB

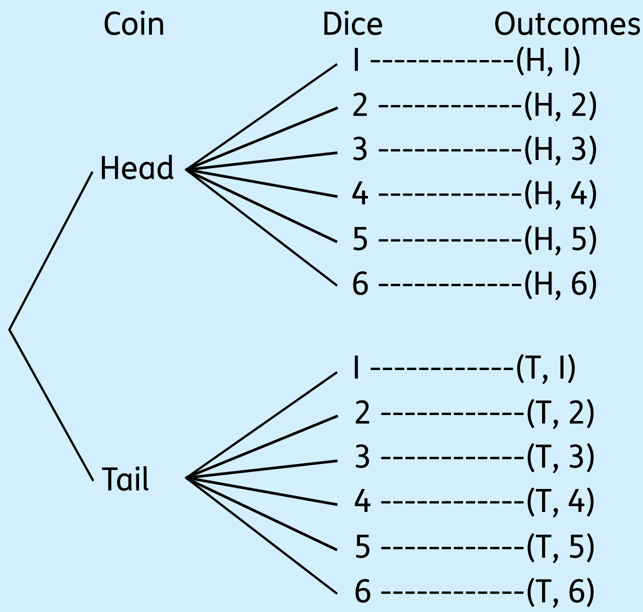
Dice 1

This diagram shows that the sample space for two dice rolling are: (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6), (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6), (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6), (4,1) (4,2) (4,3), (4,4) (4,5) (4,6), (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6), (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6).

The second method of finding the sample space for combined events is using a tree diagram. The tree diagram extends branches, where each branch represents a possible outcome of an event, with the probability of that outcome written along the branch. The tree diagram for filling two coins would be:



While the tree diagram for rolling a dice and flipping a coin together would be:

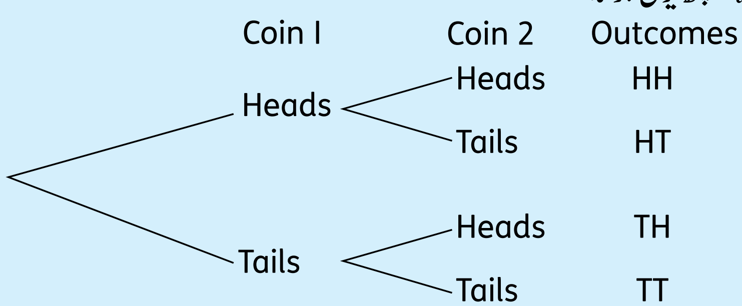


Dice 2						
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
4	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6 MB

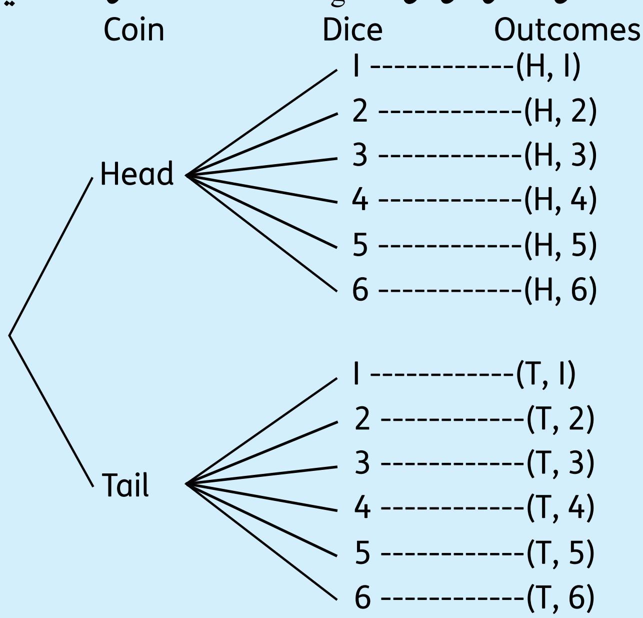
Dice 1

یہ خاکہ ظاہر کرتا ہے کہ دو ڈائس پھینکنے کی صورت میں sample space ان ممکنہ نتائج پر مشتمل ہوتی ہے: (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6), (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6), (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6), (4,1) (4,2) (4,3), (4,4) (4,5) (4,6), (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6), (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)

combined events کے لیے sample space کی جگہ find کرنے کا دوسرا طریقہ tree diagram ہے۔ جہاں ہر even branch کے possible outcome کو ظاہر کرتی ہے اور ہر branch کے ساتھ نتیجے کے امکان کو لکھا جاتا ہے۔ دو سکّوں (coins) کو اچھالنے کی صورت میں tree diagram کچھ یوں ہو گا:



جب کہ Dice پھینکنے اور سکّے اچھالنے کے عمل کو اکٹھی شکل میں tree diagram کے خاکے کی مدد سے یوں دکھایا جا سکتا ہے۔



Once the students are able to draw possibility and tree diagrams, explain them what mutually exclusive and independent events are. Explain to the students that mutually exclusive events are two events that cannot happen at the same time. For example, when flipping a coin, we cannot get heads and tails at the same time. Similarly, when playing a game, we cannot win and lose at the same time. Therefore, if two events are mutually exclusive, we add the possibility of the first and the second event, that is P(A or B) = P(A) + P(B). To calculate the probability of getting a 2 and 6 when a dice is rolled are:

$$P(2 \text{ or } 6) = P(2) + P(6)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$
$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Likewise, if the probability of one event does not affect the probability or the other events, then the two events are independent. When flipping two coins, the possibility of getting two heads is independent. Similarly, when rolling two dice, the possibility of getting two 6 is also independent. Point out to the students that two mutually exclusive events cannot be independent and vice versa. Therefore, if two events are independent, we multiply the probability of the first and the second event, that is P (A And B) = P(A) × P(B). To calculate the possibility of getting a 3 and 4 when two dice are rolled simultaneously:

$$P(A \text{ And } B) = P(A) \times P(B)$$
$$= P(3) \times P(4)$$
$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$
$$= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Using the examples and exercise from the textbook, help the students gain mastery in this competency.

جب طلبہ possiblity اور tree diagram کے خاکے بنانے کے قابل ہو جائیں تو انھیں باہمی طور خصوصی (mutually exclusive) independent events کے بارے میں بتائیے۔ طلبہ کو سمجھائیے کہ mutally exclusive events دراصل دو ایسے events ہیں جو ایک ہی وقت میں رونما نہیں ہو سکتے۔ مثال کے طور پر جب سکّے کو اچھالنے پر ہمیں سیدھا (head) اور الٹا (tail) ایک ساتھ نہیں ملتے۔ اسی طرح ایک کھیل کھیلتے ہوئے ہم بیک وقت جیت اور ہار نہیں سکتے لہٰذا اگر دو events ایک دوسرے کے ساتھ باہم ہیں تو ہم پہلے اور دوسرے event کا امکان شامل کرتے ہیں یعنی $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$۔ جب ڈائس کو پھینکنے پر 2 اور 6 حاصل کرنے کی probability کا حساب لگانے کا طریقہ یہ ہے:

$$P(2 \text{ or } 6) = P(2) + P(6)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$
$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

اسی طرح اگر ایک event کی probability دوسرے event پر اثر انداز نہیں ہوتی تب دونوں events اپنے طور پر independent ہیں۔ جب دو سکّوں کو اچھالا جائے تو سکّوں کے سیدھے (heads) آنے کی possibility بھی independent ہے۔ اسی طرح ڈائس Dice کو پھینکنے کی صورت میں 2 اور 6 کے آنے کی possibility بھی طلبہ کو اس بات کو واضح طور پر سمجھائیے دو mutually exclusive events کبھی بھی independent اور اس کے برعکس نہیں ہو سکتے لہٰذا دو events کے independent ہونے کی صورت میں ہم پہلے اور دوسرے event کی probability کو آپس میں ضرب دیتے ہیں یعنی $P(A \text{ And } B) = P(A) \times P(B)$۔ اسی طرح 3 اور 4 کے ملنے کی possibility کو calculate کرنے کے لیے جب دو dice ایک ساتھ پھینکے جاتے ہیں:

$$P(A \text{ And } B) = P(A) \times P(B)$$
$$= P(3) \times P(4)$$
$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$
$$= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

طلبہ کو اس قابلیت میں مہارت دینے کے لیے انھیں درسی کتاب میں دی گئی مشقوں اور مثالوں کو کروایئے۔