Unit 1

Sets

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Use language, notation, and Venn Diagrams to represent different types of sets and their elements
- Identify and differentiate between:
  - subset and superset
  - proper and improper subsets
  - equal and equivalent sets
  - disjoint and overlapping sets

Rationale: Students have prior knowledge of different kinds of set and Venn diagrams. They know basic language, notation and the use of Venn diagram to represent various sets. In Grade 7, the students will learn about the relationship between two sets in terms of examples and Venn diagrams.

Stimulus: Begin the lesson by recalling with the students that set is a well-defined collection of distinct objects and the multiple methods of writing a set. Recall basic set notation such as curly brackets, element, not an element, and empty set. Once the students revise how to use the set language and notation, it will be easier to explain the relationship between the two sets using Venn diagrams.

Move onto describing numbers as set. In the previous grade, students have learnt the difference between whole numbers, natural numbers, integers, composite and prime numbers etc. Let them know that these are standard sets used in mathematics. Point out that some of these number sets are part of other sets. For example, all members of whole numbers are part of integers, and all natural numbers are part of whole numbers. Such a set where every member is part of another set is called a subset. Here, a set of whole numbers is a subset of set of integers. And similarly, the set of integers is a super set of whole numbers. Now, ask the students to pile one book for each subject on the table. Next, ask the students to take out the Math books and keep them aside. Explain to them that the set of math books is a proper subset of the entire set of books. However, if a student is to make an entire new set using the set of subject books, then it is an improper subset. All sets are an improper subset of themselves. In a nutshell, tell the students that a proper subset is a set that contains some, but not all, elements of its superset, while an improper subset is a subset that contains all elements of the original set and is also equal to the superset. The concept of proper and improper subset may be confusing for some students; therefore, it is recommended to spend some extra time explaining the difference to them.

قابلیت ۱

- زبان، علامات (notations) اور وین ڈایا گرام کا استعمال کرتے ہوئے مختلف اقسام کے sets اور ان کے elements کو ظاہر کرسکیں۔
- مندرجہ ذیل کی شناخت کریں اور ان میں فرق کرسکیں۔
  - superset اور subset -
  - improper subset اور paper -
  - equivalent sets اور equal -
  - overlapping sets اور disjoint -

استدلال: طلبہ مختلف قسم کے sets اور وین ڈایا گرام کو پہلے سے جانتے ہیں۔ وہ بنیادی زبان، notation اور مختلف سیٹوں کو وین ڈایا گرام کی مدد سے ظاہر کرنے کے طریقے سے بھی واقف ہیں۔ ساتویں جماعت میں، طلبہ دو سیٹوں کے درمیان پائے جانے والے تعلق کو وین ڈایا گرام اور مثالوں کے ذریعے بیان کرنا سیکھیں گے۔

محرک: سبق کا آغاز اس دہرائی سے کیجیے کہ سیٹ مختلف اشیا کا ایک اچھی طرح تعریف شدہ مجموعہ ہے اور کسی سیٹ کو لکھنے کے کئی طریقے ہیں۔ سیٹ کی بنیادی علامتوں notation کو یاد دلایئے جیسے curly brackets، element کا ہونا اور نہ ہونا، خالی سیٹ (empty sets) جب طلبہ سیٹوں کی زبان اور notation کے استعمال کو پھر سے دہرا لیں گے تو وین ڈایا گرام کا استعمال کرتے ہوئے دو سیٹوں کے درمیان موجود تعلق کی وضاحت کرنا آسان ہو جائے گا۔

اعداد کو سیٹ کی شکل میں بیان کرتے ہوئے سبق کو پڑھاتے ہوئے آگے بڑھیے۔ پچھلی جماعت میں طلبہ نے مکمل اعداد (whole number)، قدرتی اعداد (natural number)، صحیح اعداد (Integers)، مرکب اعداد (composite number) اور مفرد اعداد (prime numbers) کے درمیان فرق کرنا سیکھا تھا۔ انھیں بتایئے کہ یہ ریاضی میں استعمال ہونے والے اعداد کے معیاری سیٹ (standard sets) ہیں یہ بھی نشان دہی کیجیے کہ ان میں سے اعداد کے کچھ سیٹ، دیگر سیٹوں کا حصّہ ہیں مثال کے طور پر: تمام مکمل اعداد (whole number) کے تمام ارکان، صحیح اعداد (integers) کا حصّہ ہیں۔ تمام قدرتی اعداد (natural numbers)، مکمل اعداد (whole number) کا حصّہ ہیں۔ ایسے سیٹ کو جس کا ہر رکن کسی دوسرے عددی سیٹ میں موجود ہو، ذیلی سیٹ (sub set) کہا جاتا ہے۔ یہاں مکمل اعداد کا سیٹ، صحیح اعداد کے سیٹ کا ذیلی سیٹ (sub set) ہے۔ اسی طرح صحیح اعداد کا سیٹ مکمل اعداد کا سپر سیٹ ہے۔ اب طلبہ سے کہیے کہ وہ میز پر ہر مضمون کی ایک ایک کتاب لاکر رکھ دیں پھر ان سے ریاضی کی کتابیں نکال کر الگ کر دیں۔ اب انھیں سمجھایئے کہ ریاضی کی کتابوں کا set، تمام کتابوں پر مشتمل سیٹ کا ایک proper sub set ہے۔ تاہم اگر کوئی طالب علم ان ہی مضامین کی کتابوں استعمال کرتے ہوئے ایک مکمل نیا سیٹ بناتا ہے تو یہ ایک improper sub set ہوگا۔ یہ بھی ذہن میں رکھیے کہ تمام سیٹ خود کا ایک تحتی ذیلی سیٹ (improper subset) مختصراً، طلبہ کو بتایئے کہ proper subset ایک ایسا set ہے جس میں اس کے سپر سیٹ کے کچھ ارکان (elements) ہوتے ہیں، لیکن تمام موجود نہیں ہوتے۔ جب کہ ایک improper sub set ایک ایسا سب سیٹ sub set ہے جس میں اس کے اصل سیٹ کے تمام اجزا یا ارکان (elements) ہوتے ہیں اور یہ superset کے برابر یا مساوی ہوتا ہے۔ طلبہ کی اکثریت کے لیے proper اور improper سیٹوں کا یہ فرق الجھن کا باعث بن سکتا ہے۔ لہٰذا ضروری ہے کہ سبق کے اس حصّے کو اضافی وقت دیا جائے تاکہ وہ اس فرق کو واضح طور پر سمجھ سکیں۔

The best way to explain the difference is that equal and equivalent sets are that the former have the exact same elements even if the order is different. Whereas the equivalents set have the same number of elements, but the members of the set may be different from one another. It is important to note that all equal sets are equivalent, but not all equivalent sets are equal as the elements may differ. The concept of one-on-one correspondence is important for equivalent sets. For each element of one set, there is one element from the other set. That is, if A = {1, 2, 3} and B = {a, b, c}, then:

$1 \longleftrightarrow a$

$2 \longleftrightarrow b$

$3 \longleftrightarrow c$

Similarly, Venn diagrams are the most appropriate way to let the students know about the difference in overlapping and disjoint sets. Two sets that have at least one common element are overlapping sets, while two sets that do not have any element in common are disjoint sets. Students often tend to get confused between disjoint and null set. Emphasize that two disjoint sets have no element in common while null sets are empty sets and have no elements.

Competency 2:

- Describe and perform the operations on union of sets, intersection of sets, difference of two sets, complement of a set
- Verify the following:
  - $A \cap A' = \varnothing$
  - $A \cup A' = U$
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Stimulus: In order to introduce operations on sets, students need to first revise and recall what a universal set is. Once they do, introduce them to union and intersection of sets. Union are the collective elements of two or more sets. It is a set that contains elements of all sets. It is denoted by U. For example:

If A = {a , b, c, d, e} and B = {e, f, g, h}, then $A \cup B$ = {a, b, c, d, e, f, g, h}.

Point out to the students that even though e is an element of both sets, it is only written once in the union set. On the contrary, intersection of two or more sets are elements that are common between the two sets. It is denoted by $\cap$. From the above example, $A \cap B$ = {e}. In some cases, the

Equal اور equivalent سیٹوں کے درمیان فرق کو سمجھانے کا بہترین طریقہ یہ ہے کہ انھیں بتایئے کہ equal وہ ہوتے ہیں جن میں بالکل وہی ارکان ہوتے ہیں خواہ ان کی ترتیب مختلف ہو۔ جب کہ equivalents set میں ارکان (element) کی تعداد تو برابر ہوتی ہے لیکن ان کے ارکان elements ایک جیسے نہیں ہوتے۔ یہاں یہ بات بھی نہایت اہم ہے کہ تمام equal سیٹ، equivalent ہوتے ہیں مگر تمام equivalents سیٹ نہیں ہوتے کیونکہ ان کے elements مختلف ہوسکتے ہیں۔ equivalent سیٹوں کے لیے ون آن ون one-on-one correspondence کا تصور بہت اہم ہے۔ ایک سیٹ کے ہر element کے لیے دوسرے سیٹ میں ایک نہ ایک element موجود ہوتا ہے۔ مثال کے طور اگر $A = \{1, 2, 3\}$ and $B = \{a, b, c\}$ تو

$1 \longleftrightarrow a$

$2 \longleftrightarrow b$

$3 \longleftrightarrow c$

اسی طرح وین ڈایا گرام (Venn diagram) طلبہ کو overlapping اور disjoint sets کے فرق کو سمجھانے کا ایک موزوں طریقہ ہے۔ دو ایسے sets جن میں کم از کم ایک element مشترک ہو اسے overlapping سیٹ کہتے ہیں جب کہ دو ایسے sets جن میں کوئی بھی elements مشترک نہ ہو انھیں disjoint sets کہتے ہیں۔ اکثر طلبہ disjoint اور null set میں تمیز نہیں کر پاتے لہٰذا اس بات پر زور دیجیے کہ دو disjoints سیٹوں میں کوئی element مشترک نہیں ہوتا۔ جب کہ null sets ایک ایسا خالی سیٹ ہے جس میں کوئی element نہیں ہوتا۔

قابلیت ۲

- سیٹوں پر مختلف عوامل جیسے یونین یا اتصال، تقاطع (intersection)، دوسیٹوں کی تفریق اور سیٹ کی complement کو انجام دے سکیں اور وضاحت کرسکیں۔
- درج ذیل کی تصدیق کرسکیں۔

  - $A \cap A' = \varnothing$
  - $A \cup A' = U$
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$

محرک: سیٹوں پر عوامل (operations) کو متعارف کرانے کے لیے ضروری ہے کہ طلبہ کو یونیورسل سیٹ کیا ہے؟ سیٹوں کے اتصال دہرائی کروایئے کہ اس کے بعد انھیں سیٹوں کے اتصال union اور تقاطع intersection سے متعارف کروایئے۔ یا یونین سے مراد دو یا دو سے زائد سیٹوں میں موجود مجموعی ارکان (elements) کا سیٹ جب دوسیٹوں کو ملا کر ایک سیٹ بنایا جاتا ہے تو اس عمل کو سیٹوں کا اتصال یا یونین کہتے ہیں۔یعنی وہ سیٹ جس میں دیے گئے سیٹوں کے تمام ارکان موجود ہوں اسے $\cup$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جیسے

اگر $A = \{a, b, c, d, e\}$ اور $B = \{e, f, g, h\}$، تو $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

طلبہ کو وضاحت سے بتایئے کہ اگرچہ e ایک ایسا رکن ہے جو دونوں سیٹوں میں موجود ہے تاہم یونین سیٹ میں e کو صرف ایک بار لکھا جائے گا۔ اس کے برعکس دو یا دو سے زیادہ سیٹوں میں (elements) جو ان سیٹوں میں مشترک (common) ہوں تقاطع یا انٹرسیکشن کو $\cap$ کی علامت سیٹوں کے تقاطع یا انٹرسیکشن کے عمل سے مراد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج بالا مثال سے : $A \cap B = \{e\}$ بعض صورتوں میں دوسیٹوں کا تقاطع

intersection of two sets is an empty set. This means that both the sets are disjoint sets. Some students tend to get confused between the symbol of union and intersection. Let the students know that the easiest way to remember the symbols is by relating to U for union and the opposite for intersection.

Move on to introducing students to what a complement of a set is. If a set of elements are present in universal set, but not set A, the element are complement of A or A'. Basically, complement is the difference (which are the elements present in one set but not the other) between universal and set A. Use the following as an example:

U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10} and A = (0, 2, 4, 6, 8, 10}, then A' = {1, 3, 5, 7, 9}

Point out to students that complement is opposite, that is everything in universal set but not in A. When finding the difference between two sets, it should be emphasized that like subtraction, the direction matters. Use the following as an example to explain to the students:

A = {1, 2, 3} and B = {2, 3, 4}, then A – B = {1}, whereas B – A = {4}

A – B is not the same as B – A as A – B is subset of A that is {1} (it contains some but not all elements of A) whereas B – A is a subset of B that is {4} as it contains some but not elements of B.

The most appropriate method of teaching students how to identities of set is by using as many examples as possible. The first identity to prove is $A \cap A' = \varnothing$

If U = {a, b, c, d, e, f} and A = {d, e, f}, then A' = {a, b, c}.

Because A' is all the elements that are not present in set A, there are no common elements in set A and set A', $A \cap B$ = empty set.

Similarly, $A \cup A' = U$. Keeping the above example in mind, All the elements of A and A' are the same as that on universal set. That is A = {d, e, f,} and A' = {a, b, c}, then U = {a, b, c, d, e, f}, hence proving the identity.

The last two identities may seem daunting to the students, but they are not very difficult if broken down. Both the identities are also known as De Morgan's Law, however it is best not to introduce the name of the law to students at this level. For both the identities, lets consider one example:

U = { 2, 4, 6, 10, 12, 14}
A = { 2, 6, 10, 12}
B = {6, 10, 12, 14}

(intersection) ایک خالی سیٹ (empty set) ہوتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ دونوں سیٹ غیر مربوط (disjoints) ہیں یعنی ان میں کوئی بھی رکن (element) مشترک نہیں۔ کچھ طلبہ کو یونین اور انٹرسیکشن کی علامتوں میں فرق نہیں کر پاتے اور الجھن میں پڑ جاتے ہیں۔ لہٰذا طلبہ کو بتائیے کہ انھیں یاد رکھنا بہت آسان ہے اگر وہ $\cup$ کو لفظ 'union' سے یعنی اتحاد اور intersection کو اس کے الٹ یا متضاد لفظ سے جوڑ لیں تو انھیں یاد رکھنا مشکل نہ ہو گا۔

اس کے بعد طلبہ کو بتائیے کہ set کے complement سے کیا مراد ہے۔ اگر کوئی سیٹ جس کے ارکان (elements) یونیورسل سیٹ میں تو موجود ہیں لیکن 'A' set میں نہ ہوں، تو یہ ارکان Set A کے complement ہیں یا A۔ دراصل complement وہ فرق ہے۔ (یعنی وہ ارکان elements جو ایک سیٹ میں تو موجود ہوں لیکن دوسرے set میں نہ ہوں) جو یونیورسل سیٹ اور set A کے درمیان پایا جاتا ہے۔ درج ذیل مثال کو وضاحت کے لیے استعمال کیجیے:

اگر $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ اور $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ ہوں، تو $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ہو گا۔

طلبہ کو یہ بات واضح طور پر سمجھائیے کہ (complement) کا مطلب 'مخالف' (opposite) ہے یعنی وہ تمام ارکان (elements) جو یونیورسل سیٹ میں موجود ہیں لیکن سیٹ A میں نہیں ہیں۔ جب دو سیٹوں کے درمیان فرق کو نکالا جائے تو اس بات پر غور کیجیے کہ تفریق subtraction کی طرح سمت (direction) کا فرق بھی معنی رکھتا ہے۔ طلبہ کو سمجھانے کے لیے درج ذیل مثال سے مدد لیجیے۔

اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{2, 3, 4\}$ ہوں، تو $A - B = \{1\}$ جبکہ $B - A = \{4\}$ ہو گا۔

کیونکہ $A - B$، $B - A$ کے برابر نہیں ہے کیونکہ $A - B$، A کا ایک تحتی سیٹ (sub set) ہے جو کہ $\{1\}$ ہے۔ اس میں A کے کچھ لیکن تمام ارکان (elements) شامل نہیں ہیں۔ جب کہ $B - A$ ، B کا ایک تحتی سیٹ (sub set) ہے جو کہ $\{4\}$ ہے کیونکہ اس میں B کے کچھ لیکن تمام ارکان elements شامل نہیں۔

طلبہ کو سیٹ کی کے فارمولے (identities of sets) سکھانے کا سب سے مؤثر طریقہ یہ ہے کہ انھیں زیادہ سے زیادہ مثالیں دی جائیں۔ ثابت کرنے کے لیے پہلی شناخت ہے $A \cap A' = \varnothing$

اگر $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ ہو اور $A = \{d, e, f\}$ ہو تو $A' = \{a, b, c\}$ ہو گا کیونکہ A' (یعنی A کا compliment میں وہ تمام ارکان elements شامل ہوتے ہیں جو set A میں موجود نہیں ہوتے اس لیے A اور A' کے درمیان کوئی بھی common element نہیں ہوتا۔ اس لیے $A \cap A' = \varnothing$ اسی طرح $A \cup A' = U$

اسی طرح $A \cup A' = U$ اوپر دی گئی مثال کو ذہن میں رکھتے ہوئے A اور A' کے تمام ارکان وہی ہیں جو universal set میں موجود ہیں یعنی اگر $A = \{d, e, f\}$ اور $A' = \{a, b, c\}$ تو $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ ہو گا جو اس Identity کو ثابت کرتا ہے۔

ہوسکتا ہے آخری دو identities طلبہ کو کچھ مشکل محسوس ہوں لیکن اگر ان کو مرحلے وار توڑا جائے۔ تو پھر یہ مشکل نہیں رہتیں۔ یہ دونوں identities ڈی مورگن کے قوانین کے طور پر بھی جانی جاتی ہیں۔ لیکن بہتر ہو گا کہ اس سطح پر طلبہ کو ان قوانین کے نام کو متعارف نہ کروایا جائے۔ ان دونوں identities کو سمجھنے کے لیے اس مثال پر غور کرتے ہیں:

$U = \{2, 4, 6, 10, 12, 14\}$

$A = \{2, 6, 10, 12\}$

$A = \{6, 10, 12, 14\}$

To prove $(A \cup B)' = A' \cap B'$, break the equation down to left hand side and the right-hand side. The left hand side says that the complement of the union set is the intersection of the individual complements. From the above example,

$A \cup B = \{2, 6, 10, 12, 14\}$ and so $(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{4\}$

The left side is {4}. Moving on to the right side:

$A' = U - A$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{2, 6, 10, 12\} = \{4, 14\}$ and
$B' = U - B$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{6, 10, 12, 14\} = \{2, 4\}$, so
$A' \cap B' = \{4, 14\} \cap \{2, 4\}$
$= \{4\}$
Since the left and right hand side are equal, the identity, $(A \cup B)' = A' \cap B'$, is proved.

The last identity is $(A \cap B)' = A' \cup B'$. Following the strategy in the previous identity, break the equation down into left and right hand side. From the above example,

$A \cap B = \{6, 10, 12\}$, so $(A \cap B)' = U - A \cap B = \{2, 4, 14\}$
The left hand side = {2, 4, 14}. Moving on to the right side:

$A' = U - A$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{2, 6, 10, 12\} = \{4, 14\}$
$B' = U - B$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{6, 10, 12, 14\} = \{2, 4\}$, so
$A' U B' = \{4, 14\} U \{2, 4\}$
$= \{2, 4, 14\}$

Since the left and right hand side are equal, thus the identity, $(A \cap B)' = A' \cup B'$, is proved. Students often tend to reverse the law or get confused with the symbol, therefore, extra carefulness should be practice when proving the identity. You may use the examples and questions form the book to gain mastery in this competency.

ثابت کیجیے کہ $(A \cup B)' = A' \cap B'$ اس equation کو توڑ کر بائیں اور دائیں توڑ دیجیے۔ بائیں جانب والا حصّہ کہتا ہے کہ یونین سیٹ کا complement، انفرادی compliments کا تقاطع (intersection) ہے اوپر کی مثال کے

$A \cup B = \{2, 6, 10, 12, 14\}$ اور اسی طرح $(A \cup B)' U - (A \cup B) = 4$

بائیں طرف {4} ہے۔ اب دائیں جانب کو حل کیجیے

$A' = U - A$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{2, 6, 10, 12\} = \{4, 14\}$ and
$B' = U - B$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{6, 10, 12, 14\} = \{2, 4\}$, so
$A' \cap B' = \{4, 14\} \cap \{2, 4\}$
$= \{4\}$

کیونکہ بائیں اور دائیں جانب مساوی ہیں اس لیے identity $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ثابت (prove) ہے۔

آخری Identity ہے $(A \cup B)' = A' \cup B'$ کے لیے ہم پچھلی identity کی پیروی کے لیے استعمال کیے گئے طریقے کو استعمال کریں گے۔یعنی مساوات کو دو حصّوں میں توڑیں گے۔ دائیں طرف والے حصّے کے مطابق

$(A \cap B)' = U - A \cap B = \{2, 4, 14\}$ لہٰذا so $A \cap B = \{6, 10, 12\}$,

بائیں جانب {2, 4, 14}اب دائیں جانب کو دیکھتے ہیں۔

$A' = U - A$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{2, 6, 10, 12\} = \{4, 14\}$
$B' = U - B$, so $\{2, 4, 6, 10, 12, 14\} - \{6, 10, 12, 14\} = \{2, 4\}$, so
$A' U B' = \{4, 14\} U \{2, 4\}$
$= \{2, 4, 14\}$

کیونکہ دائیں اور بائیں جانب مساوی (equal) ہیں لہٰذا یہ Identity $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ثابت (proved) ہے۔ اکثر طلبہ اس قانون کو الٹ (reverse) سمجھ لیتے ہیں اور علامتوں کو سمجھنے میں وہ پریشانی محسوس کرتے ہیں لہٰذا یہاں پر Identity کو ثابت کرنے کے عمل میں احتیاط سے کام لینا چاہیے۔ اور اس مہارت کے لیے طلبہ کو اضافی مشقیں کروانے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور سوالوں کو حل کروائیے۔

Unit 2 Rational Numbers

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- to identify a rational number as a number that can be expressed in the form of $\frac{p}{q}$ where p and q are integers and $q \neq 0$
- to identify and represent rational numbers on a number line
- to compare (using symbols <, >, =) and arrange rational numbers in ascending and descending order
- to round off the rational numbers to a required degree of accuracy
- to round off to give an estimate to a calculation; to check the reasonableness of the solution
- to use number line for comparing and ordering

Rationale: Rational numbers are useful in almost every aspect of life. Whether it is measuring ingredients while cooking, comparing prices, paying taxes, measuring temperature or elevation, calculating interest rates or even keeping track of time and setting our timetable. Students are familiar with what whole numbers and integers are from the previous class. Here, they will learn to broaden their number system beyond what they have already studied. Learning about rational numbers helps the students to understand fractions, decimals (both positive and negative) which prepare them for complex algebraic problems.

Begin with recalling what whole numbers and integers are and then move onto rational numbers.

Stimulus: Start the lesson by recalling with class that whole numbers are set of non-negative numbers, beginning from 0, are infinite. The place value of a digit in a whole number depends on its position in the number. For example, the place value of 3 in 14350 is 300 as 3 is at the hundred. The place value increases by the power of 10 (x^{10}) as you move from right to left. So, the place value of numbers increases as the number of digits increases. Move onto representing the whole number on a number line. Do so by draining a number line that has a whole number at an equidistance from one another. Similarly, decimal numbers are different than whole numbers as they are an alternative way of writing a fraction. They contain a whole number part and fractional part, both of which are separated by a decimal point. The place value of decimal numbers depends on its positive relative to the decimal point. The whole number digits are treated as whole numbers while the place value of the fractional part of the decimal decreases from left to right by the power of 10. For example,

باب
۲

ناطق اعداد

قابلیت ا

- Rational number کو بہ طور عدد کے شناخت کریں یعنی جیسے $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکے جس میں P اور q صحیح اعداد (integers) ہیں۔ اور $q \neq 0$
- عددی لکیر (Number line) پر ناطق اعداد rational numbers کو پہچان سکیں۔
- ناطق اعداد کا موازنہ (علامتوں =, <, > کو استعمال کرتے ہوئے) کر سکیں اور انھیں ترتیب صعودی (Ascending) اور ترتیب نزولی (descending order) میں کر سکیں۔
- ناطق اعداد کو درستی کی مطلوبہ حد (degree of accuracy) تک round off کر سکیں۔
- حساب کا تخمینہ لگانے کے لیے round off کر سکیں۔ حل یا جواب کی معقولیت reasonableness کو چیک کر سکیں۔
- عددی لکیر کا استعمال کرتے ہوئے موازنہ کر سکیں اور ترتیب دے سکیں۔

استدلال: ناطق اعداد (Rational numbers) کا عمل دخل زندگی کے تقریباً ہر شعبے میں ہے خواہ وہ کھانا پکاتے وقت اجزا کی مقدار کو ناپنے کا معاملہ ہو، قیمتوں کا موازنہ کرنا ہو، ٹیکس کی ادائیگی کرنا ہو، درجۂ حرارت یا اونچائی ناپنی ہو شرح سود (Interest rates) کا حساب کتاب لگانا ہو یا وقت کا حساب رکھنا اور اپنے شیڈول کا تعین کرنا ہو۔ سب میں یہ کارگر ہیں گزشتہ جماعت میں طلبہ نے مکمل اعداد (whole number) اور عدد صحیح (Integers) سے واقفیت حاصل کر لی تھی یہاں وہ عددی نظام کو اس سے آگے بڑھانا سیکھیں گے جس کا مطالعہ وہ پہلے سے کرتے آئے ہیں۔ ناطق اعداد کے بارے میں سیکھنے سے طلبہ کو کسور (fractions) اعشاریہ (decimals) منفی اور مثبت دونوں کو سمجھنے میں مدد ملتی ہے۔

ابتدا میں پوری جماعت کے ساتھ مل کر صحیح اعداد (Integers) اور مکمل اعداد (whole number) کا اعادہ کروائیے۔ پھر ناطق اعداد (rational numbers) پر آجائیے۔

محرک: سبق کا آغاز whole numbers کا اعادہ کے ساتھ کیجیے کہ غیر منفی یہ اعداد (non-negative numbers) کا set ہیں جو صفر '0' سے شروع ہوتے ہیں اور لامحدود (infinite) ہوتے ہیں۔ کسی مکمل عدد (whole number) میں ایک ہندسے کی مقامی قیمت اس کی پوزیشن پر منحصر ہے۔ مثال کے طور پر 14350 میں 3 کی عددی قیمت 300 ہے کیونکہ یہ پوزیشن کے حساب سے سینکڑہ کے مقام پر ہے۔ جب ہم دائیں سے بائیں کی طرف جاتے ہیں تو عددی قیمت 10 کی قوت (x^{10}) سے بڑھتی ہے لہٰذا جوں جوں ہندسوں کی تعداد بڑھتی ہے ویسے ویسے عدد کی قیمت بھی بڑھتی چلی جاتی ہے۔ اس کے بعد طلبہ کو number line پر مکمل اعداد (whole numbers) کو لکھنے کا طریقہ بتائیے۔ اس کے لیے بورڈ پر ایک عددی لکیر number line بنائیے جس پر مکمل اعداد یکساں فاصلے پر لکھ دیجیے۔ اس طرح اعشاری اعداد (Decimal numbers) مکمل اعداد سے مختلف ہوتے ہیں۔ کیونکہ یہ کسی کسر fractions کو لکھنے کا متبادل طریقہ ہے۔ ان میں ایک حصّہ مکمل عدد پر اور دوسرا حصّہ کسر پر مشتمل ہوتا ہے۔ جن کو اعشاری (Decimal) سے الگ کیا جاتا ہے۔ اعشاری اعداد کی عددی قیمت (place value) کا انحصار ان کی اعشاریہ (Decimal point) سے مثبت سے قیمت پر ہے۔ مکمل عدد کے ہندسوں کو بہ طور مکمل عدد کے ہی سمجھا جاتا ہے جب کہ اعشاریہ کے کسری و حصّے (fractional part) کی عددی قیمت بائیں سے دائیں کم ہوتی جاتی ہے اور یہ 10 کی طاقت (power) سے گھٹتی ہے مثال کے طور پر:

Ten thousand	Thousand	Hundred	Ten	Unit	.	Tenths	Hundredth	thousandth
a. 243.67								
		2	4	3	.	6	7	
b. 1564.708								
	1	5	6	4	.	7	0	8
c. 98721.065								
9	8	7	2	1		0	6	5

Students sometimes tend to believe that the value of digit in two numbers is the same regardless of its position. For example, the value of 2 in 204 and 21. Point out that the value of 2 in 204 is 200 while the value of 2 in 21 is 20. Emphasize on the use of place value chart. Similarly, the value of 3 in 314 and 529.3 is 300 and 0.3 (or $\frac{3}{10}$) respectively. Move onto recalling integers with the students next. Ask them to recall and define what integers are. Let them know that integers are negative and positive numbers that do not include decimals and fractions. Recall with the students the absolute value of any integer is its distance from zero on the number line regardless of its direction.

Once all the revision is done and the students' area able to differentiate between whole numbers and integers, move forward to introducing them to rational numbers is any number that can be written in the form of $\frac{p}{q}$ where q is never 0. Write the following numbers of the board: $\frac{3}{4}$, 0.75, 5, and 156. Ask the students which number they think is/are rational number(s). They are most likely to say $\frac{3}{4}$ and or 0.74. However, clarify to them that whole numbers are also rational numbers because they can be expressed as fractions as $\frac{5}{1}$ and $\frac{156}{1}$. Furthermore, ask the students if they think 0 is a rational number. Explain to them that 0 is a rational number as it can be expressed as fraction, that is $\frac{0}{1} = 0$, $\frac{0}{5} = 0$, and so on. Summarise that decimals, fractions and integers are all rational numbers.

When representing rational numbers on the number line, the denominator is considered. For example, if $\frac{5}{3}$ is to be represented on a number line, a segment between each pair of consecutive number is divided into three equal parts and so on. Give different rational numbers to students to represent on the number line.

Competency 2:

- to round off the rational numbers to a required degree of accuracy
- to round off to give an estimate to a calculation; to check the reasonableness of the solution

Stimulus: Rounding off can be done using either the number line or otherwise. Students may use the strategy according to their ease. When rounding off a number using a number line, check which rounding place value it is closer to. For example, if a number isrounded off to the nearest 10, we check the tens it is closer to or if a number is rounded off to the nearest 100, we check the hundreds

Ten thousand	Thousand	Hundred	Ten	Unit	.	Tenths	Hundredth	Thousandth
a. 243.67								
		2	4	3	.	6	7	
b. 1564.708								
	1	5	6	4	.	7	0	8
c. 98721.065								
9	8	7	2	1		0	6	5

اکثر طلبہ یہ سمجھتے ہیں دو مختلف عددی مقداروں میں کسی ہندسے کی قیمت ایک جیسی ہوتی ہے۔ خواہ اس کی position کچھ بھی ہو مثال کے طور پر 204 اور 21 میں 2 کے ہندسے کی قیمت لہٰذا اس بات کو وضاحت سے سمجھایئے کہ 204 میں 2 کی قیمت 200 ہے جب کہ 21 میں 2 کی قیمت 20 ہے۔ لہٰذا اس بات پر زور دیجیے کہ عدد کی قیمت place value کو سمجھنے کے لیے place value chart کو استعمال کرنا ضروری ہے۔ اسی طرح عددی مقداروں 314 اور 529.3 میں 3 کی قیمت (place value) بالترتیب 300 ہے اور 0.3 (یا $\frac{3}{10}$) ہے۔ اب سبق کو آگے بڑھاتے ہوئے طلبہ کے ساتھ مل کر صحیح اعداد (integers) کا اعادہ کرتے ہوئے انھیں Integers کی تعریف یاد دلایئے۔ اور بتایئے کہ صحیح اعداد Integers وہ مثبت اور منفی اعداد ہیں جن میں اعشاریہ (decimals) اور کسر (fractions) شامل نہیں ہیں۔ طلبہ کو بازیافت (recall) کروایئے کہ کسی بھی صحیح عدد کی مطلق قدر (absolute value) سے مراد نمبر لائن پر وہ فاصلہ ہے ہو جو وہ عدد '0' صفر سے رکھتا ہے۔ خواہ وہ صفر کے دائیں ہو یا بائیں۔

طلبہ جب دہرانے کا عمل مکمل کر چکیں اور وہ مکمل اعداد اور صحیح اعداد میں فرق کو واضح طور پر سمجھنے لگیں تو انھیں ناطق اعداد سے متعارف کروایئے۔ کہ یہ ایسے عدد ہیں جن کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے جہاں q کبھی بھی صفر '0' نہیں ہوتا۔ اب بورڈ پر یہ اعداد لکھیے: $\frac{3}{4}$, 0.75,5 and 156 طلبہ سے پوچھیے کہ ان میں سے کون سا عدد/کون سے اعداد ناطق (rational number) ہیں مزید برآں طلبہ سے یہ بھی پوچھیے ان کی اکثریت کا امکانی جواب ہو گا کہ 0.75 یا $\frac{3}{4}$ تاہم وضاحت کیجیے کہ whole number بھی rational number ہیں۔ کیونکہ انھیں کسور کی صورت میں لکھا یا ظاہر جا سکتا ہے یعنی $\frac{5}{1}$ اور $\frac{156}{1}$۔ اس کے بعد طلبہ سے پوچھیے کہ ان کے خیال میں کیا 0 ایک ناطق عدد ہے۔ پھر وضاحت کیجیے کہ '0' ایک ناطق عدد ہے کیونکہ اسے بھی کسر کی صورت میں لکھا یا ظاہر کیا جا سکتا ہے، یعنی $\frac{0}{5}$ = 0, $\frac{0}{1}$ = وغیرہ مختصراً بتایئے کہ اعشاریہ (decimal) کسور (fractions) اور صحیح اعداد (Integers) یہ تمام دراصل ناطق اعداد (rational numbers) ہیں۔

ناطق اعداد کو کسی عددی لکیر (number line) پر ظاہر کرتے وقت ان کے نسب نما یا مخرج (denominator) پر غور کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر $\frac{5}{3}$ کو نمبر لائن پر ظاہر کرنا ہو تو قاعدے کے مطابق ہر دو مسلسل اعداد کے درمیانی حصّے کو تین ≠ برابر حصّوں میں تقسیم کیا جائے گا۔ طلبہ کو مزید ناطق اعداد دیتے ہوئے انھیں نمبر لائن پر ظاہر کرنے کی ہدایت کیجیے۔

قابلیت ۲

- ناطق اعداد (rational numbers) کو مطلوبہ درجہ تک round off کر سکیں۔
- کسی حسابی عمل کے ذریعے تخمینہ لگانے کے لیے round off کرنا۔ تاکہ سوال کے حل کی معقولیت کو جانچا جا سکے۔

محرک: راؤنڈ آف کرنے کے لیے عددی لکیر یا کسی اور طریقے کو بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ طلبہ اپنی سہولت کے مطابق کسی بھی حکمت عملی کو اختیار کر سکتے ہیں۔ جب نمبر لائن کی مدد سے کسی عدد کو round off کیا جائے تو یہ دیکھنا پڑتا ہے کہ وہ عدد کس عددی قیمت place value کے قریب تر ہے۔ مثال کے طور پر اگر کسی عدد کو قریب ترین 'دہائی' (nearest 10) تک round off کرنا ہو تو یہ دیکھا جائے گا کہ وہ کون سی دہائی کے

it is closer to. Similarly, if a number is asked to be rounded off tenths, hundredths or thousandth, we check the tenth, hundredth or thousandth it is the closest too.

The other strategy of rounding off a number is to consider the digit immediately to the right of the rounding place. For example, if a number is to be rounded off to the nearest hundred, tens is considered, and if the rounding place is thousands, hundreds in considered. If the digit on the right of the rounding place is 5 or more than 5, the number digit is rounded up (that is increased) and if the digit is less than 5, the number is rounded down. The strategy works the same for decimals, positive and negative integers, and rational numbers, except for fractions, they are first converted into decimals. The rounding place of decimals are tenths, hundredths, and thousandths. Move onto explaining to the students that a solution is estimated by first rounding off the numbers and then performing the operation on them.

Competency 3:

- Identify and convert between the various types of fractions
- To compare (using symbols <, >, =) and arrange rational numbers in ascending and descending order
- Perform operations of rational numbers
- Verify commutative, associative, and distributive properties of rational numbers

Stimulus: Explain to the students that rational numbers are treated like fractions. All operations are performed on rational numbers like they are performed on fractions. Similarly, when comparing and ordering rational numbers, in case of like fractions where the denominator is same, the numerator is compared and ordered from smallest to biggest or vice versa. However, in case of unlike fractions, they first need to be converted into equivalent fractions to make the denominator the same and then compare and ordered. Students often tend to believe that greater denominator means greater fraction and smaller denominator means smaller fraction. Point out to the students that a greater denominator usually means a smaller fraction until and unless it is converted into equivalent fractions and then the numerator is compared. Once the students are clear on how to compare and order rational numbers, move on to performing operations.

Explain to the students that rational numbers are added, subtracted, multiplied and divided in the same way as fractions. When adding or subtracting fractions with the same denominators, only the numerators are added or subtracted respectively. Extra emphasis should be given for the signs in

قریب تر ہے۔ اسی طرح اگر قریبی 'سیکڑہ' (nearest 100) تک round off کرنا ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ وہ نمبر لائن پر کون سے سینکڑے کے قریب تر ہے۔ اسی طرح کسی عددی مقدار کو دسواں، tenth، سوواں (Hundredth) یا ہزارواں (thousandths) تک round off کرنا ہو تو یہ دیکھا جائے گا کہ وہ دسویں، سوویں یا ہزارویں میں کس مقام کے قریب ترین ہے۔

کسی عدد کو round off کرنے کی دوسری حکمت عملی یہ ہے کہ round off کرنے والی جگہ کے دائیں طرف right side موجود ہندسوں (digits) پر غور کیا جائے۔مثال کے طور پر اگر عدد کو قریب ترین (nearest hundred) تک round off کرنا ہو تو دسویں tenths کو دیکھا جاتا ہے، اگر round off place کرنے کی جگہ ہزارویں thousands ہے تو پھر hundreds پر غور کیا جائے گا۔ اسی طرح اگر round off کرنے والی جگہ کے دائیں طرف موجود ہندسہ (digit) 5 یا 5 سے زیادہ ہے تو عدد کو اوپر کی طرف یعنی بڑھا کر round off کیا جاتا ہے اور اگر ہندسہ (digit) 5 سے کم ہو تو عدد کو نیچے کی طرف یعنی کم کر کے round off کر دیا جاتا ہے۔ یہ حکمت عملی اعشاری اعداد، مثبت اور منفی اعداد، صحیح اعداد (integers) اور ناطق اعداد (rational numbers) پر لاگو ہوتی ہے سوائے کسور (fractions) کے جو پہلے اعشاریہ (decimals) میں تبدیل کی جاتی ہے اعشاریہ اعداد یا اعشاریہ والی عددی مقداروں کی rounding place ہیں دسواں مقام (tenths) سوواں (Hundredths) اور ہزارواں (thousandths)۔ اگلے مرحلے میں طلبہ کو سمجھائیے کہ حل کا تخمینہ لگانے کے لیے پہلے اعداد کو round off کرتے ہیں اور اس کے بعد ان پر حسابی عمل یا عوامل (operations) انجام دیے جاتے ہیں۔

قابلیت ۳

- مختلف اقسام کی کسور (fractions) کی شناخت کریں اور انھیں ایک دوسرے میں تبدیل کر سکیں۔
- ناطق اعداد کا موازنہ کر سکیں (' = ,> ,< کی علامتوں کو استعمال کرتے ہوئے) اور ان کو صعودی اور نزولی ترتیب میں لکھ سکیں۔
- ناطق اعداد (rational numbers) پر حسابی عوامل کو انجام دے سکیں۔
- ناطق اعداد کی مبادلہ (commutative)، تلازم (associative)، تقسیمی (distributive properties) خاصیت کو ثابت (verify) کر سکیں۔

محرک: طلبہ کو سمجھائیے کہ ناطق اعداد (rational numbers) کو کسور (fractions) کی طرح سمجھا جاتا ہے۔ ریاضی کے تمام عوامل (operations) ناطق اعداد پر اسی طرح انجام دیے جاتے ہیں جیسے کہ کسور (fractions) پر کیے جاتے ہیں۔ اسی طرح جب ناطق اعداد (rational numbers) کا موازنہ یا تقابل اور ترتیب دی جائے تو کسور کے ہم مخرج like fractions ہونے کی صورت میں جہاں denominator ایک ہی جیسا ہوتا ہے وہاں صرف شمار کنندہ (numerator) کا موازنہ/تقابل کیا جاتا ہے اور اسے چھوٹے سے بڑے درجے یا اس کے برعکس ترتیب دیا جاتا ہے۔ تاہم unlike fractions کی صورت میں، پہلے انھیں equivalent fractions میں تبدیل کیا جاتا ہے تا کہ مخرج denominator ایک جیسا ہو جائے۔ پھر ان کا موازنہ کیا جاتا ہے اور انھیں ترتیب دی جاتی ہے۔ اکثر طلبہ یہ سمجھتے ہیں کہ بڑا مخرج denominator کا مطلب بڑی کسر اور چھوٹا مخرج (denominator) کا مطلب چھوٹی کسر ہے۔طلبہ کی توجہ اس طرف دلائیے کہ دراصل بڑا مخرج (denominator) عموماً چھوٹی کسر کو ظاہر کرتا ہے جب تک کہ اسے equivalent fractions میں نہ تبدیل کر دیا جائے اور پھر numerator کا موازنہ کیا جائے۔ ایک بار جب طلبہ ناطق اعداد کا موازنہ کرنا اور پھر انھیں ترتیب دینے کا عمل سمجھ لیں تو انھیں ریاضی کے عوامل (operations) انجام دینا سکھائیے۔ طلبہ کو بتائیے کہ ناطق اعداد کی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم بالکل کسور کی طرح کی جاتی ہے۔ جب ایسی fraction کو جمع یا تفریق کیا جائے جن کا مخرج (denominator) ایک جیسا ہو تو اس صورت میں صرف شمار کنندہ (numerator) کو جمع یا تفریق کیا جاتا ہے۔ اگر منفی ناطق اعداد ہیں

case of negative rational numbers. Point out to the students that adding two positive rational numbers will always result in a positive answer and adding two negative rational numbers will always result in a negative answer. Similarly, subtracting negative rational numbers, the final answer has the sign of the number with greater numerical value. Show the examples from the book to solidify the student's concept. Ample practice should be done so students can master this concept. When multiplying two positive rational numbers, the product is a positive rational number, whereas, when multiplying a positive rational number with a negative rational number, the answer is a negative rational number. When dividing rational numbers, we basically multiply one rational number to the reciprocal of the other rational number. For example, if the question says $\frac{1}{2} \div \frac{5}{6}$, we will reciprocate the second number to $\frac{6}{5}$ for it to become $\frac{1}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{5}$.

As in multiplication, the division of two positive and two negative rational numbers always results in a positive quotient. Whereas the division of unlike rational numbers (one positive and one negative) always results in a negative quotient.

Properties on rational numbers apply the same way as properties or law apply on integers. Commutative law suggests that the sum or product does not change if the order of numbers is changed. Rational numbers, when added or multiplied follow this law. Use different examples within the classroom to prove this property. The following examples may be used:

- $\frac{7}{12} + \frac{1}{5}$
- $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

For each of the above given examples ask the students to prove the commutative property of rational numbers. However, when the order of rational numbers is changed when subtracting, the answer changes. Therefore, subtraction of rational numbers does not follow the commutative law. Addition and multiplication of rational numbers also follow the associative law. The grouping of numbers does not change the sum or product of three numbers. In the following example, the grouping of numbers does not change the sum. Ask the students to prove that the following rational numbers follow the associative law over addition and multiplication to strengthen their concept.

- $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$
- $\frac{6}{7}, \frac{10}{4}, \frac{3}{5}$

Rational numbers also follow the distributive law of multiplication over addition and distributive law of multiplication over subtraction. Using the examples from the textbook, explain to the students that to prove if certain statements follow a particular law, we must solve them.

تو علامتوں (signs) پر بہ طور خاص توجہ دینی چاہیے۔ طلبہ کو یہ ضرور سمجھائیے کہ دو مثبت ناطق اعداد کو جمع کرنے پر ہمیشہ مثبت جواب حاصل ہو گا۔ جب کہ دو منفی ناطق اعداد کو گھٹانے پر حاصل ہونے والے جواب ہمیشہ منفی ہو گا۔ اسی طرح اگر دو ناطق اعداد کو منہا کیا جائے تو حاصل ہونے والے جواب کے ساتھ اس ناطق عدد کے ساتھ موجود علامت (sign) لگائی جائے گی جس کی عددی قیمت زیادہ ہو۔ اس تصور میں پختگی پیدا کرنے کے لیے طلبہ کو کتاب میں دی گئی مثالوں کی مدد سے مشق کروایئے تاکہ وہ اس میں مہارت حاصل کرسکیں۔ جب دو مثبت ناطق اعداد کو آپس میں ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب (product) ہمیشہ مثبت ناطق عدد میں ہو گا۔ جب کہ ایک مثبت ناطق عدد کو ایک منفی ناطق عدد سے ضرب دینے پر حاصل ضرب (product) ہمیشہ ایک منفی عدد میں ہو گا۔ جب ناطق اعداد کو تقسیم کیا جاتا ہے۔ تو ہم دراصل ایک ناطق عدد rational numbers کو دوسرے ناطق اعداد کے reciprocal یا ضربی معکوس سے ضرب دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر سوال میں ہو کہ: $\frac{5}{6} \div \frac{1}{2}$ تو ہم دوسرے عدد کو اُلٹ دیتے ہیں یعنی $\frac{3}{5} = \frac{6}{5} \times \frac{1}{2}$۔

جیسا کہ ضرب میں ہوتا ہے، دو مثبت positive اور دو منفی ناطق اعداد کو divide کرنے پر مثبت حاصل تقسیم (positive quotient) کی صورت میں ملتا ہے۔ جب کہ دو مختلف علامات والے ناطق اعداد کو divide کرنے پر حاصل تقسیم (negative quotient) کی شکل میں ملتا ہے۔

ناطق اعداد (rational numbers) پر وہی خصوصیات اور قوانین لاگو ہوتے ہیں جو صحیح اعداد (integers) پر کیے جاتے ہیں۔ commutative law کے مطابق اعداد کی ترتیب کو بدلنے سے حاصل ضرب (product) یا sum میں کوئی change نہیں آتا یعنی جب ناطق اعداد (rational numbers) کو جمع (add) یا ضرب (multiply) دیا جائے تو وہ اس قانون کی پیروی (follow) کرتے ہیں۔ اس خاصیت (property) کو ثابت کرنے کے لیے مختلف مثالوں کے ذریعے طلبہ کو سمجھائیے۔ درج ذیل مثالوں کو استعمال کیجیے۔

- $\frac{7}{12} + \frac{1}{5}$
- $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

طلبہ سے کہیے کہ وہ درج بالا مثالوں کے ذریعے ناطق اعداد کی commutative property کو ثابت کریں۔ تاہم اگر ناطق اعداد کو تفریق کرتے ہوئے ان کی ترتیب (order) کو بدل دیا جائے تو جواب بھی تبدیل ہوجاتا ہے۔ لہٰذا ناطق اعداد کی تفریق commutative law کی پیروی نہیں کرتی۔ ناطق اعداد کی جمع اور ضرب (Associative law) کی پیروی کرتے ہیں اس کے مطابق، تین اعداد کی گروپنگ میں اعداد کی ترتیب کی تبدیلی حاصل ضرب کے مجموعے (sum) پر اثر انداز نہیں ہوتی ہے۔ مندرجہ ذیل مثالوں میں اعداد کی گروپنگ sum کو change نہیں کرتی طلبہ سے کہیں کہ وہ اس بات کو prove کریں کہ درج ذیل مثالوں میں ناطق اعداد کی جمع اور ضرب associate law کی پیروی کرتی ہے تاکہ وہ اس تصور میں مزید پختہ ہوسکیں۔

- $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$
- $\frac{6}{7}, \frac{10}{4}, \frac{3}{5}$

ناطق اعداد، خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع اور ضرب distributive law of multiplication over addition اور خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق اور ضرب distributive law of multiplication over subtraction کی پیروی بھی کرتے ہیں۔ درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کی مدد سے طلبہ کو وضاحت سے بتائیے کہ یہ ثابت کرنے کے لیے کہ آیا کوئی بیان کسی خاص قانون کی پیروی کرتا ہے ہمیں اسے حل کرنا ضروری ہوتا ہے۔

Unit 3

Squares and Square Roots

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Recall HCF and LCM
- Recognise and calculate squares of numbers
- Find the square roots of perfect squares of natural numbers, fractions, and decimals.

Rationale: The outcome of this competency depends on the student's ability to use prior knowledge of squares and prime factorization. The application of square numbers is not limited to mathematical computing but also scientific. Squaring numbers is done when calculating area, for Pythagoras theorem and even scientific formulas, whereas square roots are applied when we need to arrange objects in same numbers of rows or columns.

Begin the lesson by recalling prime factorization to find the LCM and HCF of numbers and then move onto explaining what square numbers are and how a square root is calculated.

Stimulus: Students have prior knowledge of factors, multiples, least common multiples and highest common factors. Recall with the students how prime factorization and long division is done to find the HCF and LCM. Revise that each number is made up prime numbers. Breaking down a number into its prime factors is called prime factorization. Therefore, it can be said that every number is a product of its prime factors. Write a 2-digit number, such as 64 on the board. Ask the students to find the factors of 64 that are only prime number. They may do so by either drawing the factor tree or division ladder. Prime factorization always starts with the smallest prime number, that is 2. The prime factorization of 64 is $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

Move on revising HCF with the students. The HCF or highest common factor is the product of the common factors of two or more numbers. Let the students know that they are two methods of finding the HCF, that is the listing method and the division method. The listing method uses prime factorization. It is likely that student may get make mistakes when doing HCF – one of which is that they may start dividing the number with a composite number such as 4 rather than a prime number that is 2. Therefore, ample practice needs to be done to strength the students' skills.

Once the students have mastered HCF, move onto LCM. Explain to the students that LCM is the least common multiple, that is it is the smallest multiple of both the numbers. LCM can be obtained using either prime factorization or division method. Let's take 8 and 12 for example. Using prime factorization, break each number into its prime factors, that is $8 = 2 \times 2 \times 2$ and $12 = 2 \times 2 \times 3$. Now, to find the LCM, multiple common and uncommon factors, that is $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$. Therefore, 24 is the smallest common multiple of 8 and 12.

باب ۳

مربع اور جذر المربع

قابلیت ا

- HCF اور LCM کا اعادہ
- مربع اعداد کی شناخت اور calculate کرسکیں۔
- قدرتی اعداد، کسور اور اعشاریہ کے کامل مربع کے جذر المربع معلوم کرسکیں۔

استدلال: اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کی مربع اور مفرد اجزائے ضربی کے گزشتہ علم کے استعمال کی صلاحیت پر منحصر ہے۔ مربع اعداد کا اطلاق محض ریاضیاتی حساب و کتاب تک محدود نہیں بلکہ یہ سائنسی میدان میں بھی ہوتا ہے۔ square numbers کو رقبہ معلوم کرنے، فیثا غورث کے کلیے اور سائنسی فارمولوں میں بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ جب کہ جذر المربع کا اطلاق اس وقت کیا جاتا ہے جب ہمیں کسی چیز کو اشیا قطاروں اور کالموں columns کی برابر تعداد میں ترتیب دینا ہو۔

اعداد کے LCM اور HCF کو نکالنے کے لیے prime factorization کو یاد کرتے ہوئے سبق کا آغاز کیجیے۔ اس کے بعد وضاحت کیجیے کہ مربع اعداد کسے کہتے ہیں اور جذر المربع کیسے نکالا جاتا ہے۔

محرک: طلبہ پہلے سے جانتے ہیں کہ جزو ضربی، اضعاف، ذو اضعاف اقل اور عادِ اعظم کسے کہتے ہیں طلبہ کے ساتھ دہرائیں کہ مفرد اجزائے ضربی اور طویل تقسیم کے ذریعے کے LCM اور HCF کو نکالنے کے لیے کیسے کی جاتی ہے۔ طلبہ کو یاد دلائیے کہ ہر عدد، مفرد عدد سے بنا ہے۔ کسی عدد کو اس کے مفرد اجزائے ضربی میں توڑنا prime factorization کا عمل کہلاتا ہے۔ لہٰذا یہ کہا جا سکتا ہے کہ ہر عدد اپنے مفرد جزو ضربی prime factor کی product ہے۔ اب بورڈ پر ایک دو ہندسی عدد لکھیے جیسے 64 پھر طلبہ سے 64 کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے اس کام کو کرنے کے لیے وہ تقسیم سیڑھی یا factor tree میں سے کسی بھی ایک طریقے کے ذریعے انجام دے سکتے ہیں۔ یاد رکھیے کہ مفرد اجزائے ضربی بنانے کے لیے سب سے چھوٹے مفرد عدد کو چنا جاتا ہے جو کہ 2 ہے لہٰذا 64 کی مفرد اجزائے ضربی ہو گی: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$۔

طلبہ کے ساتھ HCF کا اعادہ کیجیے کہ HCF یا highest common factor، دو یا زیادہ اعداد کے مشترک اجزائے ضربی حاصل ضرب product ہے۔ HCF کو نکالنے یا معلوم کرنے کے دو طریقے ہیں۔ اندراجی طریقہ (Listing method) اور تقسیمی طریقہ (division method)۔ listing method میں prime factoization کو استعمال کیا جاتا ہے۔ اسی وجہ سے اکثر طلبہ HCF کو معلوم کرتے ہوئے وہی غلطیاں کرتے ہیں۔ جن میں ایک یہ کہ وہ مفرد عدد 2 کے بجائے تقسیم کا آغاز ایک مرکب عدد (composite number) جیسے 4 سے کرتے ہیں۔ لہٰذا طلبہ کو اس مہارت پر عبور حاصل کرنے کے لیے بھرپور مشق کی ضرورت ہے۔

جب طلبہ HCF نکالنے میں مہارت حاصل کر لیں تو انھیں LCM پر لے آئیے اور طلبہ کو وضاحت سے بتائیے کہ LCM (least common multiple) دو عددوں کا سب سے چھوٹا مشترک اضعاف ہے۔ LCM کو معلوم کرنے کے لیے، مفرد اجزائے ضربی prime factorizate یا division method میں سے کسی ایک کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر 8 اور 12 لیں اب پہلے prime facotorizatic کے ذریعے ہر عدد کو اس کے مفرد اجزائے ضربی میں تقسیم کیجیے یعنی $2 \times 2 \times 2 = 8$ اور $3 \times 2 \times 2 = 12$ اب ان کا LCM معلوم کرنے کے لیے مشترک common اور غیر مشترک جزو ضربی (uncommon factors) کو ضرب دیجیے یعنی۔ $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ لہٰذا 8 اور 12 کا سب سے چھوٹا مشترک اضعاف 24 ہے۔

Division method of LCM is a little different from the division method to find HCF. Numbers are written on the division ladder and are divided by a common prime factor. The numbers are divided by prime numbers until all the numbers in the rows are 1. Write all the prime factors and then multiply all the common and uncommon factors. Tell the students that HCF and LCM are related in such a way that the product of two numbers will be equal to the product of their HCF and LCM.

Once the concept of LCM and HCF is clear amongst the students move onto explaining to them what square numbers are. This competency will require them to revisit the competency of index notations (a method of writing the number of times a number has been multiplied) as square numbers are essentially written as index notation. Explain to the students that square numbers are when a number multiplies by itself. For example, if 6 is multiplied by 6, the product is 36. It can therefore be said that the square of 6 is 36 or $6^2 = 36$. A perfect square is defined as the product of two integers of equal value. For example, 49 is a perfect square because it is a square of +7 or –7, that is

$7 \times 7 = 49$, and

$(-7) \times (-7) = 49$

The numbers 1, 4, 9, 16, …, 100 are all perfect squares. Emphasize to the students that for the first 100 numbers there are only 10 perfect squares, because the square root of these numbers are integers, whereas the square root of other numbers are not integers. When writing a square number as index notation, students often tend to make mistakes and multiply the number by 2 instead of itself, that is $6^2 = 12$ instead or 36. To help the students recognise perfect squares, create a reference chart of perfect squares up to 20^2 and practice them through games or flashcards. Point out to the students that decimals and fractions can also be squared even though they may not result in a perfect square. For example, $(0.3)^2 = 0.09$ which is not a perfect square and $(\frac{4}{5})^2 = \frac{20}{25}$ also not a perfect square. Also emphasize to the students that squaring a number does not always result in a bigger number. The square of 0.3 or $(\frac{3}{10})$ results in a smaller number that is 0.09 or $(\frac{9}{100})$.

Once the students gain mastery in squaring numbers, move onto explaining them that square root of a number is finding the number that is multiplied by itself to result in a square number. For example, if $(2)^2 = 4$, the square root of 4 is 2. The symbol of square root is $\sqrt{\ }$. Every positive integer has two square roots: one positive and one negative. So, the square root of 4 is +2 and = 2. Mention to the students that square root is the inverse of squaring a number and not halving.

LCM کا تقسیمی طریقہ، HCF کو معلوم کرنے کے division method سے تھوڑا مختلف ہے۔ اعداد کو تقسیمی سیڑھی (division ladder) پر لکھا جاتا ہے۔ اور پھر انھیں ایک مشترک کہ مفرد جزو ضربی سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ تقسیمی عمل اس وقت انجام دیا جاتا ہے جب تک کہ قطاروں میں لکھے گئے نمبر 1 کے برابر نہ آجائیں۔ تمام مفرد اجزائے ضربی کو لکھیے پھر تمام مشترک common اور غیر مشترک جزو ضربی uncommon factors کا حاصلِ ضرب معلوم کریں۔ طلبہ کو بتائیے کہ HCF اور LCM میں باہمی تعلق کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ دو اعداد کا حاصل ضرب (product) ان کے HCF اور LCM کے حاصل ضرب (Product) کے برابر ہوتا ہے۔

طلبہ کے LCM اور HCF کے تصور میں پختگی حاصل کر لینے کے بعد انھیں مربع اعداد (square numbers) کے بارے میں بتائیے۔ دراصل اس قابلیت کو سیکھنے کے لیے انھیں انڈیکس نوٹیشن (ایک عدد کے بار بار ضرب ہونے کی تعداد کو لکھنے کا ایک طریقہ) کی سابقہ مہارت اعادہ کرنا پڑے گا۔ کیونکہ مربع عدد عام طور پر انڈیکس نوٹیشن کے طور پر لکھے جاتے ہیں۔ طلبہ کو سمجھائیے کہ مربع عدد وہ جب کسی عدد کو خود سے ضرب دیا جائے تو وہ مربع عدد کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر 6 کو 6 سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب 36 ہوتا ہے اس لیے کہا جا سکتا ہے کہ 6 کا مربع 36 ہے یا $36 = 6^2$ ایک کامل مربع (perfect square) کی تعریف یہ ہے کہ یہ مساوی قدر (equal value) والے دو صحیح اعداد (integers) کا حاصل ضرب (product) مثال کے طور پر 49 ایک perfect square ہے کیونکہ یہ +7 یا −7 کا square ہے یعنی

$7 \times 7 = 49$, اور

$(-7) \times (-7) = 49$

اسی طرح یہ اعداد 1، 4، 9، 16، ... ، 100 تمام کامل مربع (perfect squares) ہیں۔ طلبہ کو سمجھاتے ہوئے اس پر زور دیجیے کہ پہلے 100 تک کے اعداد میں صرف 10 (perfect squares) ہیں۔ کیونکہ ان کے جذر المربع (square roots) صحیح اعداد (integers) ہیں۔ جب کہ دیگر اعداد کے (square roots)، صحیح اعداد (integers) نہیں ہوتے۔ square numbers کو index notation کے طور پر لکھتے وقت اکثر طلبہ غلطیاں کرتے ہیں۔ اور اس عدد کو خود اسی عدد سے ضرب دینے کے بہ جائے 2 سے ضرب دیتے ہیں یعنی $6^2 = 12$ یعنی بہ جائے $6^2 = 36$ کے $6^2 = 12$ لہٰذا طلبہ کو perfect squares کی شناخت میں مدد فراہم کرنے کے لیے 20^2 تک کے perfect square کا ایک جدول تیار کیجیے اور انھیں مختلف کھیلوں اور فلیش کارڈز کے ذریعے مشق کروائیے۔ طلبہ کو بتائیے کہ اعشاریہ (decimals) اور کسور (fractions) کو بھی مربع کیا جا سکتا ہے۔ اگرچہ نتیجے میں perfect square حاصل نہیں ہوتے مثال کے طور پر $(0.3)^2 = 0.09$ اور اسی طرح $(\frac{4}{5})^2 = \frac{20}{25}$ طلبہ کو یہ بات بھی سمجھائیے کہ کسی عدد کو مربع کرنے سے ہمیشہ ایک بڑا عدد حاصل نہیں ہوتا جیسے $0.3(\frac{3}{10})$ کو مربع کرنے پر $0.3(\frac{9}{100})$ حاصل ہوتا ہے جو کہ اصل عدد سے بھی چھوٹا عدد ہے۔

طلبہ squaring numbers کو اچھی طرح سمجھ لیں تو انھیں جذر المربع (square root) کے بارے میں بتائیے۔ کسی عدد کا جذر المربع معلوم کرنے سے مراد اس عدد کو تلاش کرنا ہے کہ جس کو خود اسی عدد سے ضرب دی جائے تو نتیجے میں ایک مربع عدد حاصل ہو مثال کے طور پر اگر $(2)^2 = 4$ کے تو 4 کا square root 2 ہو گا۔ square root کی علامت $\sqrt{}$ ہے۔ ہر مثبت صحیح عدد (positive integer) کے دو square roots ہوتے ہیں ایک مثبت اور ایک منفی۔ لہٰذا 4 کا جذر المربع +2 یا −2 ہیں۔ طلبہ کو بتائیے کہ جذر المربع کسی عدد کو نصف کرنے کا عمل نہیں بلکہ یہ کسی عدد کو مربع کرنے کا اُلٹ عمل ہے۔

Explain to the students that prime factorization is used to find the square root of a number. Once all prime factors are determined using division ladder, we take one number from each pair of prime factors. The product of the chosen factors is a square root of the number. For example, the prime factors of 324 are $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$. So, the square root of 324 is $2 \times 3 \times 3 = 18$. Point out to the students that the prime factors of numbers that are perfect squares occur in pair and so the square root of each number has one number from each pair. Similarly, when finding the square root of decimals, they are first converted as fractions. And then the square root of the denominator and numerator is determined. The final simplified answer is the square root of the squared decimal. Fractions follow the same step. Using the examples and exercise questions from the textbook to help the students strengthen their concept.

طلبہ کو سمجھایئے کہ کسی عدد کا جذر المربع معلوم کرنے کے لیے مفرد عمل تجزی prime factorization کا استعمال کیا جاتا ہے۔ جب تقسیمی سیڑھی division ladder کی مدد سے تمام مفرد اجزائے ضربی کا تعین کرلیا جائے۔ تو حاصل ہونے والے مفرد اجزائے ضربی (prime factors) کے ہر جوڑے سے ایک عدد لیا جاتا ہے منتخب کیے گئے جزوضربی (factors) کو آپس میں ضرب دینے پر جو حاصل ضرب (product) ہے۔ وہ مطلوبہ عدد کا جذر المربع (square root) ہوتا ہے مثال کے طور پر 324 کے prime factors ہیں: $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$ لہٰذا 324 کا square root: $18 = 3 \times 3 \times 2$۔ اسی طرح طلبہ کو بتایئے کہ اعداد کے prime factors جو کامل مربع (perfect squares) ہیں جوڑوں (pair) کی شکل میں ہوتے ہیں اور اسی لیے ہر عدد کے square root میں ہر جوڑے سے ایک عدد شامل ہوتا ہے۔ اسی طرح جب اعشاریہ (decimal) کا square root معلوم کرنا ہو تو اسے پہلے کسر (fraction) کی شکل میں تبدیل کیا جاتا ہے اور پھر Numerator اور Denominator کا square root الگ الگ نکالا جاتا ہے۔ آخر میں جو سادہ ترین شکل حاصل ہوتی ہے یعنی جواب وہ اصل اعشاریہ کے مربع کا square root ہوتا ہے۔ کسور (fractions) کو حل کرنے کا بھی یہی طریقہ ہے۔ اس تصور کو پختہ کرنے کے لیے طلبہ کو کتاب میں دی گئی مشقوں اور مثالوں کی بھرپور مشق کروایئے۔

Unit 4

Rate, Ratio, and Proportion

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- to calculate rate and average rate of quantities.
- to calculate increase and decrease in a ratio based on change in quantities

Rationale: The outcome of this competency depends on the student's prior knowledge about division, multiplication, place values and fractions. Mastery in these skills help students in simplifying and interpreting ratios, while also solving real-world problems associated with rate. Understanding and gaining mastery in rates, ratio, and proportion is essential for mathematical fluency. Learning the concepts of rate helps students grasp real-world contexts such as speed, cost, time, and efficiency, whereas rate helps students compare quantities for recipes, sports, statistics, and data. Moreover, ratio and proportion help compare quantities required for the fields of science, engineering, economics, etc.

Stimulus: Start the lesson by recalling the concept of rate is a special ratio in which the two terms or values are in different units. The word "per" denoted by a '/' (a forward slash) gives a clue that we are dealing with a rate. For example, if a 12-ounce can of corn costs Rs 85 the rate is Rs 85 for 12 ounces or Rs $\frac{85}{12}$ oz. Subsequently, explain to the students that a unit rate is a ratio that compares two related quantities in different units, and the second unit is 1 (meaning per). For example, if we say Asif types 60 words in a minute, then his rate of typing is 60 words per minute or 60 words/minute. Unit rate is basically calculated by simplifying the numerator and denominator until the denominator becomes 1. That is if a dozen eggs are sold for Rs 96, one egg will sell for $\frac{96}{12}$ = Rs 8. So, the rate of eff is Rs 8/egg.

Once students develop the understanding of what rate is and how to calculate it, move onto introducing them to 'average rate'. Let them know that the average rate is defined as the rate at which one quantity is changing with respect to something else changing. In other words, an average rate calculates the amount of change in one item divided by the corresponding amount of change in another. Using the examples and questions from the book, build in on this concept in order to help students achieve mastery.

Next, move onto recalling with students the concept of ratio to the students by drawing 7 apples, and 14 bananas on board. Ask the students how they can compare the number of apples to the number of bananas. How many less are the apples as compared to the bananas. Lead them to the definition of ratio which is a method of comparing two or more quantities. It tells us how much more or less one quantity is from the other. Tell them that the ratio of the number of apples to the number of bananas is 7 is to 14, which is also written as 7 : 14. Students often tend to make the mistake of writing ratio in the correct order, for example writing ratio of bananas to apples instead of apples to bananas. Therefore, it is very essential to lay emphasis on writing the ratio in the correct order.

شرح، نسبت اور تناسب

قابلیت ا

- مقداروں کی اوسط شرح (average rate) اور شرح (rate) کا تخمینہ لگا سکیں۔
- مقداروں میں تبدیلی کی بنیادوں پر نسبت (ratio) میں اضافے اور کمی کو معلوم کر سکیں۔

استدلال: اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کی تقسیم، ضرب، مقامی قیمت اور کسور کے بارے میں پہلے سے موجود معلومات پر منحصر ہے۔ ان مہارتوں پر عبور حاصل کرنے سے طلبہ نسبت (ratio) سادہ بنانے اور سمجھنے کے قابل ہوتے ہیں۔ علاوہ ازیں روزمرّہ زندگی میں شرح (rate) سے متعلقہ عبارتی سوالوں کو بھی حل کر سکتے ہیں۔ شرح (rate) نسبت (ratio) اور تناسب (proportion) کی سمجھ اور مہارت حاصل کرنا ریاضی کی روانی کے لیے ضروری ہے۔ شرح (rate) کے تصورات کو سیکھنے سے طلبہ رفتار، قیمت، وقت اور کارکردگی کو زندگی سے جوڑنے کی افادیت کو سمجھنے کے قابل ہو جاتے ہیں۔ جب کہ نسبت (ratio) طلبہ کو کھانا پکانے کی ترکیبوں کھیلوں، اعداد و شمار اور ڈیٹا (Data) کے لیے مقداروں کا موازنہ کرنے میں مدد دیتا ہے۔ مزید برآں تناسب (proportion) اور نسبت (ratio) سائنس، انجینئرنگ، معاشیات وغیرہ جیسے شعبوں کے لیے مطلوبہ مقداروں کا موازنہ کرنے میں مددگار ہے۔

محرک: سبق کا آغاز شرح (rate) کے تصور کو یاد دلاتے ہوئے کیجیے کہ یہ ایک خاص نسبت (ratio) جس میں دو terms یا values مختلف اکائیوں (units) میں ہوتی ہیں۔ لفظ فی (per) جسے سلیش '/' کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے اس سے پتہ چلتا ہے کہ ہم شرح (rate) کے ساتھ معاملہ کر رہے ہیں۔ مثلاً اگر 12 اونس کا مکئی کا ڈبا 85 روپے میں آتا ہے۔ تو شرح (rate) 85 روپے فی 12 اونس یا 85 روپے 12 اونس ہو گی۔ اس کے بعد طلبہ کو unit rate سمجھائیے کہ یونٹ فی اکائی شرح ایک نسبت (ratio) ہے جو کہ دو ایسی متعلقہ مقداروں کا موازنہ کرتا ہے جن کی اکائیاں مختلف ہوتی ہیں۔ اور دوسری اکائی 1 (یعنی فی) ہے۔ مثال کے طور پر اگر ہم یہ کہیں کہ آصف ایک منٹ میں 60 الفاظ ٹائپ کرتا ہے تو اس کی ٹائپنگ کی شرح (rate) 60 الفاظ فی منٹ یا 60 الفاظ/منٹ ہو گی۔ اکائی کی شرح (unit rate) کا تخمینہ لگانے یا حساب کتاب کرنے کے لیے ہم شمار کنندہ (numerator) اور مخرج (denominator) کو آسان یا سادہ بنانے کا عمل اس وقت تک کرتے ہیں جب تک کہ مخرج 1 نہ بن جائے۔ یعنی اگر ایک درجن انڈے 96 روپے میں فروخت ہوتے ہیں، تو ایک انڈا $\frac{96}{12}$ = Rs 8 روپے کو ہو گا لہٰذا انڈے کی قیمت شرح میں 8 روپے فی انڈا یا 8 روپے/انڈا ہے۔

طلبہ ایک بار اس بات کو سمجھنے لگیں کہ شرح کیا ہے اور اس کا تخمینہ کیسے لگاتے ہیں تو انھیں اوسط شرح (average rate) سے متعارف کروائیے۔ انھیں بتائیے کہ اوسط شرح کی تعریف اس شرح (rate) کے طور پر کی جاتی جس پر ایک مقدار کسی دوسری چیز کے بدلنے کے حوالے سے تبدیل ہو رہی ہے دوسرے الفاظ میں معلوم کرنے اوسط شرح، ایک چیز (item) میں تبدیلی کی مقدار کو دوسری متعلقہ شے میں ہونے والی تبدیلی کی مقدار سے تقسیم کرنے پر معلوم ہوتی ہے۔ درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور سوالوں کا استعمال کرتے ہوئے اس تصور کو مزید واضح کیجیے تاکہ طلبہ اس مہارت پر عبور حاصل کر سکیں۔

اس کے بعد بورڈ پر 7 سیب اور 14 کیلے بنا کر طلبہ کے ساتھ نسبت (ratio) کے تصور کا اعادہ کروائیے۔ طلبہ سے پوچھیے کہ وہ سیب کی تعداد کا کیلے کی تعداد سے موازنہ کیسے کر سکتے ہیں۔ کیلے کے مقابلے میں سیب کتنے کم ہیں؟ اب طلبہ کو نسبت (ratio) کی تعریف بیان کرتے ہوئے بتائیے کہ یہ دو یا زیادہ مقداروں کا موازنہ کرنے کا ایک طریقہ ہے جو ہمیں بتاتا ہے کہ ایک مقدار دوسری سے کتنی زیادہ یا کم ہے انھیں بتائیے کہ سیبوں کی تعداد کا نسبت (ratio) کیلوں کی تعداد سے 7 بہ مقابلہ 14 ہے جسے 7 : 14 لکھا جاتا ہے اکثر طلبہ نسبت کو صحیح ترتیب میں نہیں لکھ پاتے مثال کے طور پر سیب سے کیلوں کا تناسب لکھنے کے بہ جائے کیلے کا نسبت سیب سے لکھنا اس لیے ضروری ہے کہ نسبت کو لکھتے وقت درست ترتیب پر زور دیا جائے۔

Let the students know that ratios can also be expressed as fraction. So, 7 : 14 can be expressed as $\frac{7}{14}$. Just like how fractions are simplified to their lowest term, so can the ratio. However, make it clear to the students that fractions and ratios are different. While all ratios can be expressed as fractions, not all fractions can be expressed as ratios. Move to explaining the students how ratios are simplified – by dividing both the numbers to their common factor. So 7 : 14 is simplified to 1 : 2. This means that for every apple, there are 2 bananas. Point out to the students that since the ratio is comparison, it does not have any unit.

After the students can calculate and simplify ratio, move onto explaining them how to calculate an increase or decrease in ratios. There are two conditions when calculating the increase or decrease in ratios. In case of increasing quantity in a ratio $a : b$, where the value of b is greater than the value of a ($b > a$), we multiply the quantity by the fraction $\frac{b}{a}$. For example, to increase 16 in the ratio 4 : 5, the value will be multiplied by $\frac{5}{4}$.

$16 \times \frac{5}{4}$

$= \frac{80}{4}$

$= 20.$

The value 20 is greater than 16. We therefore follow a simple formula for multiplying the value with a greater number in ratio as the numerator and a smaller number in ratio as the denominator. This is done to find a new value that is proportionally greater than the original value, based on the given ratio. Similarly, when decreasing a quantity in ratio $a : b$, where the value of b is greater than the value of a ($b > a$), we multiply the quantity by the fraction $\frac{a}{\mathrm{b}}$. For example, to decrease 84 in the ratio 5 : 12, the value will be multiplied by $\frac{5}{12}$.

$84 \times \frac{5}{12}$

$= \frac{420}{12}$

$= 35$

The value 35 is smaller than 84. We therefore follow a simple formula for multiplying the value with a smaller number in ratio as the numerator and a greater number in ratio as the denominator. This is done to find a new value that is proportionally smaller than the original value, based on the given ratio. Make sure the students understand both conditions thoroughly to calculate the correct value.

طلبہ کو بتائیے کہ نسبت (ratio) کو کسر (fraction) کی شکل میں بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے لہٰذا 7 : 14 کو $\frac{7}{14}$ بھی لکھا جا سکتا ہے بالکل اسی طرح جیسے کسور (fractions) کو مختصر کر کے ان کی سادہ ترین شکل میں لایا جاتا ہے۔ تاہم طلبہ کو وضاحت سے سمجھائیے کہ نسبت (ratios) اور کسور (fractions) ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں اگرچہ تمام نسبتوں کو کسور (fractions) کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے لیکن ہر کسر کو نسبت نہیں بنایا جا سکتا۔

پھر طلبہ کو سمجھائیے کہ نسبت کو کیسے سادہ بنایا جاتا ہے دونوں اعداد کو ان کے مشترک جزوضربی (common factor) سے تقسیم کرکے لہٰذا 7 : 14 کی سادہ شکل 1 : 2 ہے یعنی ہر سیب کے مقابلے میں دو کیلے موجود ہیں۔ طلبہ کو بتائیے کہ کیونکہ نسبت صرف موازنہ ہے اس لیے اس کی کوئی اکائی (unit) نہیں ہوئی۔ جب طلبہ نسبت کا تخمینہ یا حساب لگانا اور سادہ شکل میں تبدیل کرنا سیکھ لیں تو انھیں نسبت میں کمی یا اضافے کا حساب لگانا سکھایئے۔ نسبت میں اضافہ یا کمی کا حساب لگانے کی دو conditions ہیں۔ اگر نسبت a : b ہو تو اضافے کی صورت میں جہاں b کی قدر (value) a سے زیادہ ہو (یعنی $b > a$) تو ہم مقدار کو $\frac{b}{a}$ سے ضرب کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر نسبت 5 : 4 میں 16 کا اضافہ کرنا ہو، تو اضافہ کی جانے والی مقدار یعنی 16 کو $\frac{5}{4}$ سے ضرب دی جائے گی یعنی۔

$16 \times \frac{5}{4}$

$= \frac{80}{4}$

$= 20$

حاصل ہونے والی قدر 20 ہے جو 16 سے بڑی ہے لہٰذا ہم یہاں ایک سادہ سے کلیے (formula) کو استعمال کرتے ہیں جس کے تحت دیے گئے نسبت (ratio) کو کسر کی شکل میں لکھتے ہوئے کے بڑے عدد کو بہ طور شمار کنندہ numerator اور چھوٹے عدد کو بہ طور مخرج رکھنا ضروری ہے۔ تاکہ حاصل ہونے والی نئی قدر (value) دیے گئے نسبت کی بنیاد پر اصل قدر سے متناسب طور پر زیادہ ہو۔ بالکل اسی طرح نسبت $a : b$ ہو تو مقدار کمی کرنے کی صورت جہاں b کی قدر a (value) سے زیادہ ہے یعنی $(b : a)$ وہاں ہم مقدار کو کسر $\frac{b}{a}$ سے ضرب دیتے ہیں مثال کے طور پر 12 : 5 کے نسبت میں 84 کو کم کرنے کے لیے 84 کو $\frac{5}{12}$ سے ضرب دی جائے گی۔

$84 \times \frac{5}{12}$

$= \frac{420}{12}$

$= 35$

حاصل ہونے والی نئی قدر ہے جو 84 سے کم ہے۔ لہٰذا ہم ایک سادہ سے فارمولے کا استعمال کریں گے جس کے تحت ضرب کرنے کے لیے ہم دیے گئے نسبت کو کسر کی شکل میں لکھتے وقت چھوٹے عدد کو بہ طور شمار کنندہ اور نسبت کے بڑے عدد کو بہ طور مخرج رکھنا ضروری ہے۔ تاکہ حاصل ہونے والی نئی قدر دیے گئے نسبت کی بنیاد پر اصل قدر سے متناسب طور پر چھوٹی یعنی کم ہو۔ اس بات کا اطمینان کر لیجیے کہ طلبہ نے درست طور پر value کا حساب لگانے کے لیے دونوں صورتوں کو اچھی طرح سمجھ لیا ہے۔

Competency 2:

- Explain and calculate direct and inverse proportion

Stimulus: Ask the students if they have ever heard of the following phrases:

'More demands mean more supply'

'If more people work, it will take less days'

'The faster we drive, the lesser time we take to cover a given distance'

'The efficiency of a machine decreases with time'

They will likely say yes. Ask them if they feel there is a relationship between the two quantities in each statement. Once they reply, brainstorm with them and inform them that proportion is when two ratios become equal. A ratio can be expressed as a fraction; therefore, a proportion says that two fractions are equal. If there is an increase or decrease in the ratio, the other ratio will change too. Introduce the students to the terms of the proportion. In the proportion:

3 : 4 = 21 : 28

$\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$

3, 4, 21, and 28 are proportionals terms of proportion. The end terms, 3 and 28 are extremes whereas the middle terms, 4 and 21 are means. To find a missing term in proportion, we equate the product of extremes to the product of means.

Move onto introducing two types of proportions to the students. Using the above phrases, ask the students how one quantity affects the other quantity. In the first two phrases, if one quantity (demand) increases, so does the other quantity (supply). This is direct proportion, where if one quantity increases, so does the other quantity, or if one quantity decreases, so does the other quantity. The rest of the phrases have an inverse or indirect proportion, that is if one quality increases, the other decreases or if one quantity decreases, the other increases. Using the examples of distance and time and speed and time, explain to the students in detail how direct or inverse proportions work.

قابلیت ۲

- تناسب راست (direct proportion) اور تناسب معکوس (inverse proportion) کو بیان کرسکیں اور اس کو معلوم کرسکیں۔

محرک: طلبہ سے پوچھیے کہ کیا آپ نے یہ جملے سنے ہیں:

'زیادہ طلب (demand) کا مطلب ہے زیادہ رسد'

'اگر زیادہ لوگ کام کریں گے تو دن کم لگیں گے۔'

'جتنا تیز چلائیں گے، ایک مقررہ فاصلہ طے کرنے میں ہمیں اتنا ہی کم وقت لگے گا۔'

'مشین کی کارکردگی وقت کے ساتھ کم ہوتی جاتی ہے۔'

وہ ممکنہ طور پر 'ہاں' کہیں گے۔ پھر ان سے پوچھیے کہ کیا آپ محسوس کرتے ہیں کہ مذکورہ بالا بیان کردہ ہر جملے میں دی گئی دونوں مقداروں کے درمیان کوئی تعلق ہے؟ جب وہ جواب دیں تو ان کے ساتھ مل کر ذہن پر زور دیجیے اور انھیں بتائیے کہ تناسب (proportion) وہ ہے جب دو نسبتیں (ratios) برابر ہو جائیں۔نسبت کو کسر کی شکل میں بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے اس لیے تناسب (proportion) یہ بتاتا ہے کہ دو کسور آپس میں برابر ہیں اگر ایک نسبت (ratio) میں اضافہ یا کمی واقع ہو تو دوسری نسبت بھی تبدیل ہو گی۔ طلبہ کو تناسب (proportion) کی اصطلاح سے متعارف کروائیں۔ تناسب میں:

$3 : 4 = 21 : 28$

$\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$

21، 4، 3 اور 28 ہیں، یہاں اختتامی terms 3 اور 28، extremes ہیں۔ جب کہ درمیانی terms 4 اور 21 means ہیں۔ تناسب میں (missing term) معلوم کرنے کے لیے ہم انتہاؤں (extremes) کی حاصل ضرب کو وسطین (means) کی حاصل ضرب product کے مساوی رکھتے ہیں۔

طلبہ کو تناسب کی دونوں قسمیں متعارف کروائیے اور درج بالا جملوں کا استعمال کرتے ہوئے پوچھیے کہ ایک مقدار دوسری مقدار پر کیسے اثر ڈالتی ہے۔ ابتدائی دو جملوں پر غور کیجیے اگر ایک مقدار مانگ (demand) بڑھ جاتی ہے تو دوسری مقدار رسد (supply) بھی بڑھ جاتی ہے یہ تناسب راست (direct proportion) ہے۔یعنی جب ایک مقدار میں اضافہ ہوتا ہے تو دوسری مقدار بھی بڑھتی ہے اور جب ایک مقدار میں کمی آتی ہے تو دوسری بھی کم ہو جاتی ہے جب کہ بقیہ جملوں میں تناسب معکوس (indirect or inverse proportion) پایا جاتا ہے۔یعنی اگر ایک مقدار بڑھے گی تو دوسری میں کمی واقع ہو گی اور اگر ایک مقدار میں کمی ہوتی ہے تو دوسری مقدار بڑھتی ہے۔ طلبہ کو یہ بات سمجھانے کے لیے فاصلہ اور وقت، رفتار اور وقت کی مثالوں کو استعمال کرتے ہوئے طلبہ کو تفصیل سے بتائیے کہ direct proportion یا inverse proportion کیسے کام کرتا ہے۔

Unit 5 Financial Arithmetic

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Identify and differentiate between selling price, cost price, loss, discount, profit percentage, and loss percentage

Rationale: The outcome of this competency is mainly to develop financial literacy that is a part of our everyday lives. We deal with money in every aspect of our lives, whether we are buying, selling, or managing our money. This competency also helps students to develop problem solving skills in real-world scenarios such as banking, accounting, taxes, budgeting, spendings and investments. Students will use their knowledge of number operations and percentages and apply it on money problems to attain mastery in financial arithmetic.

Stimulus: Begin the lesson by asking the students to imagine that they own a shop where they sell pencils and buy the pencil from the manufacturer for Rs 2. Now, ask them the following questions:

- Would you sell the pencils for the same price as you bought from the manufacturer?
- How would the prices you decide to sell the pencils for affect your business?
- Would you offer a discount?

Students in everyday life hear the terms 'price', 'discount', 'off' etc. Ask them to explain what it means. Once you have completed the starter activity and asked the follow-up questions, move forward with explaining to students the difference between cost price, selling price, profit and loss. Using the scenario above, tell them that the price they would buy the pencils from the manufacturer is the cost price, i.e. Rs 2. The price at which they would sell the pencils to the customers is the selling price (for example Rs 5 or even Rs 2). If the cost price is greater than the selling price, it would result in a loss. Whereas, if the selling price is greater than the cost price, it would result in a profit. Repeat the definition with the students multiple times to avoid any confusion. Let them know that the percentage of profit or loss is calculated in terms of cost price as it is the initial investment made by the seller. Write the following formulas on board:

For example, if you buy the pencils for Rs 2 and decide to sell it for Rs 5, the selling price is higher than the cost price, which will result in profit. That is:

Profit $= SP - CP$
$= 5 - 2$
$=$ Rs 3

To calculate profit percentage,

profit % $= \frac{3}{2} \times 100$

باب
۵
مالیاتی حساب

قابلیت ۱

قیمت فروخت (selling price)، لاگت (cost price)، نقصان (loss)، رعایت (discount)، منافع فی صد (profit percentage) اور نقصان فی صد (loss percentage) کو پہچان سکیں اور اُن میں فرق کر سکیں۔

استدلال: اس قابلیت کا نتیجہ درحقیقت مالیاتی شعور کو فروغ دینا ہے جو ہماری روزمرّہ زندگی کا حصّہ ہے۔معاملہ خواہ خرید و فروخت کا ہو یا پھر ہم اپنے لیے پیسوں کے بندوبست کرنے کا زندگی کے ہر مرحلے پر روپے پیسوں سے متعلقہ معاملات سے ہمارا واسطہ پڑتا رہتا ہے یہ قابلیت طلبہ کو عملی زندگی کے مختلف شعبوں میں مسائل حل کرنے کی صلاحیت فراہم کرتی ہے جیسے بینکاری، اکاؤنٹنگ، ٹیکس، بجٹ، اخراجات اور سرمایہ کاری وغیرہ۔طلبہ عددی عوامل اور فی صد سے متعلقہ اپنے علم کا روپے پیسوں سے متعلق مالی مسائل پر اطلاق کرکے مالیاتی ریاضی میں مہارت حاصل کریں گے۔

محرک: سبق کا آغاز ایک تصوراتی مشق کے ساتھ کیجیے اور طلبہ سے کہیں کہ وہ تصور کریں کہ ان کی ایک دکان ہے جہاں وہ پنسلیں فروخت کرتے ہیں اور پنسل بنانے والے (manufacturer) سے 2 روپے میں پنسل خریدتے ہیں۔ اب ان سے یہ سوالات پوچھیے:

- کیا آپ پنسلیں اسی قیمت پر فروخت کریں گے جس پر آپ نے مینوفیکچرر سے خریدی ہیں؟
- آپ جس قیمت پر پنسلیں فروخت کریں گے وہ آپ کے کاروبار کو کیسے متاثر کرے گی؟
- کیا آپ رعایت دیں گے؟

طلبہ سے پوچھیے کہ وہ روزمرّہ زندگی میں قیمت، رعایت، آفر وغیرہ جیسے کچھ الفاظ سنتے ہیں ان کا کیا مطلب ہے؟ جب آپ اس سرگرمی کو مکمل کر چکیں اور سوالات پوچھنے کا مرحلہ بھی طے کرلیں تو پھر طلبہ کو بتائیے کہ قیمت خرید، قیمت فروخت، نفع اور نقصان کے درمیان کیا فرق ہے۔ مذکورہ بالا منظر نامے کا استعمال کرتے ہوئے انھیں بتائیے کہ وہ مینوفیکچرر سے جس قیمت پر پنسل خریدیں گے وہ ہے یعنی 2 روپے اور جس قیمت پر وہ صارف کو پنسل بیچیں گے وہ قیمت فروخت ہے (مثال کے طور پر 5 روپے یا پھر 2 روپے) اگر قیمت خرید زیادہ ہے اور قیمت فروخت کم ہے تو نتیجے میں نقصان ہو گا۔ جب کہ اگر قیمت فروخت زیادہ ہے اور قیمت خرید کم ہے تو منافع حاصل ہو گا طلبہ کو کسی بھی اُلجھن سے بچانے کے لیے ان تعریفوں کو بار بار دہرائیے۔ انھیں بتائیے کہ منافع اور نقصان کا فی صد قیمت خرید کے حساب سے نکالا جاتا ہے کیونکہ یہ بیچنے والے کی ابتدائی سرمایہ کاری ہوتی ہے۔ بورڈ پر درج ذیل فارمولے لکھیے۔

Loss = cost price − selling price	Profit = selling price − cost price
$\text{Loss\%} = \frac{\text{Loss}}{\text{CP}} \times 100\%$	$\text{Profit\%} = \frac{\text{Profit}}{\text{CP}} \times 100\%$

مثال کے طور پر اگر آپ 2 روپے میں خریدتے ہیں اور اسے 5 روپے میں فروخت کرنے کا فیصلہ کرتے ہیں تو قیمت فروخت (selling price) قیمت خرید (cost price) سے زیادہ ہو گی یعنی کہ منافع ہو گا۔

لہٰذا منافع (profit) = قیمت خرید (CP) − قیمت خرید (SP)

= 5 − 2
= Rs 3

= 150%

Similarly, if you decide to sell the pencils for Rs 1, the cost will be higher than the selling price and would hence result in a loss.

Loss = CP – SP

= 2 =1

= Rs 1

To calculate loss percentage,

loss % = $\frac{1}{2} \times 100$

= 50 %

Let the students know that these formulas can be manipulated to find any missing values. Students often tend to believe that the selling price is always higher than the cost price, however this is not true as discounts and loss, at times, makes the selling price lower than the cost price. Once the students can successfully calculate the cost price, selling price, profit, loss, their gains, and even percentage, move onto explaining to them how discount is calculated.

The calculation of discounts requires students to revisit how percentages are calculated as discounts are mainly a percentage of the marked price. Introduce them to the term 'marked price'. It is the price that we usually see on the price tag. The marked price may or may not be different from the selling price. If a discount is applied, the marked price will be higher than the selling price. A discount, therefore, is described as a reduction in the marked price. Point out to the students that discounts are only calculated on marked price and not on selling or cost price. Similarly, discount percentages are calculated as:

$$\text{Discount\%} = \left(\frac{\text{discount}}{\text{marked price}}\right) \times 100\%$$

Just like formulas for profit and loss, the formula for discount can also be manipulated according to its use. Use the examples and exercises from the textbook to help the students attain mastery in the competency. Independent worksheets can also be given to students to practice how to manipulate formulas according to the questions asked.

اب منافع کی فی صد (profit percentage) نکالنے کے لیے:

$$\text{profit } \% = \frac{3}{2} \times 100$$
$$= 150\%$$

اسی طرح اگر آپ پنسل کو 1 روپے میں فروخت کرنے کا فیصلہ کرتے ہیں تو قیمت یا لاگت فروخت کی قیمت سے زیادہ ہو گی۔ اور آپ کو نقصان ہو گا۔

Loss = CP – SP

قیمتِ فروخت – قیمت خرید = نقصان

= 2 =1

= Rs 1

نقصان کا فی صد نکالنے کے لیے

$$\text{loss } \% = \frac{1}{2} \times 100$$
$$= 50\ \%$$

طلبہ کو بتایئے کہ ان فارمولوں کو کسی بھی missing value کو تلاش کرنے کے لیے ترتیب دیا جا سکتا ہے۔

اکثر طلبہ یہ سمجھ بیٹھتے ہیں کہ قیمتِ فروخت ہمیشہ قیمتِ خرید سے زیادہ ہوتی ہے تاہم یہ خیال درست نہیں کیونکہ نقصان کی صورت میں قیمت فروخت بعض اوقات قیمت خرید سے کم بھی ہوسکتی ہے جب طلبہ قیمت خرید، قیمت فروخت، نفع، نقصان اور ان کے فوائد اور فی صد کا حساب کتاب لگانے میں کامیاب ہو جائیں کامیابی کے ساتھ لگانے لگیں تو انھیں سمجھایئے کہ رعایت کا حساب کیسے لگایا جاتا ہے۔

رعایت (Discount) کا حساب یا تخمینہ لگانے کے لیے طلبہ کو دوبارہ دیکھنا پڑے گا کہ فی صد کیسے نکالا جاتا ہے۔ کیونکہ رعایت marked price میں کمی ہوتی ہے۔ طلبہ کو marked price سے متعارف کروایئے یہ وہ قیمت ہے جسے ہم اشیا کے قیمت کے ٹیگ (price tag) پر لکھا ہوا دیکھتے ہیں marked price اور قیمت فروخت ایک جیسی بھی ہوسکتی ہیں اور مختلف بھی۔ اگر کسی چیز پر رعایت (discount) دی گئی ہو تو عموماً marked price، قیمت فروخت سے زیادہ ہوتی ہے۔ لہٰذا رعایت کو marked price میں کمی کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ طلبہ کو یہ بات واضح طور پر سمجھایئے کہ رعایت صرف marked price پر نکالی جاتی ہے نہ کہ قیمت فروخت یا قیمت خرید پر اسی طرح رعایت (Discount) کا فی صد بھی نکالا جاتا ہے۔

$$\text{Discount\%} = \left(\frac{\text{discount}}{\text{marked price}}\right) \times 100\%$$

نفع اور نقصان کے فارمولوں کی طرح رعایت (discount) کا فارمولا بھی استعمال کے مطابق ترتیب دیا جا سکتا ہے۔ اس قابلیت میں مہارت کے لیے طلبہ کو درسی کتاب میں دی گئی مشقوں اور مثالوں کو کروایئے۔ علیحدہ سے ورک شیٹس بھی دی جا سکتی ہیں تاکہ وہ مختلف سوالوں کے مطابق فارمولوں کو ترتیب دے سکیں۔

Competency 2:

- Explain commission, income tax, property tax, general sales tax, value added tax, zakat, and ushr

Stimulus: Prior to the day of teaching, ask the students to bring any computerized bill. When the students do, ask them to identify if tax was added to the selling price. Let the students know that the government imposes certain percentage of taxes on goods and services. This helps regulate a country's budget and helps the government facilitate public. There are taxes imposed on land, property, income, sale goods and services, etc. The percentage of taxes is decided annually. This competency requires students to use their knowledge and skill of percentage.

Explain to the students the different types of taxes and help them calculate the amount. Define each type of tax:

- Income tax is a tax on the basic annual income of an individual. For the tax to apply, the income should exceed the threshold and thus have a taxable income.
- Property tax is a tax on any property – be it a land, house, or a shop.
- General Sales Tax (GST) is a tax paid by the buyer to the seller on the selling price.
- Value-added Tax (VAT) is a tax applied on all commercial activities. This would include packaging or distribution of goods or provision of services.

Tell them that to find the tax percentage of a given quantity, convert the tax percentage into fractional form and then multiply by the quantity. Let the students know that when finding the percentage of a quantity (such as taxable income, property tax amount etc), the easy way to calculate is to replace 'of' from the question into a multiplication sign. For example, if the question asks to find 8% income tax on Rs 1500000/ year, we will calculate it as:

$\frac{8}{100} \times 1{,}500{,}000$

= Rs 120,000

So, 8% income tax on Rs 1,500,000/ year is Rs 120,000. Other taxes are calculated in a similar way. Each tax is a certain percentage. Emphasize the students to read the question carefully and identify the percentage amount.

Once the students understand and can calculate the different kinds of taxes, move onto explaining to them what commission is. Explain to them that commission is an agent's fee when they sell a certain product or service. It may be a flat fee or a percentage of the total cost. The percentage varies with each agent. For example, An agent makes a 5% commission on a sale of one mobile phone that costs Rs 50,000. Can you calculate how much money he makes on the sale of 5 mobile phones?

For one mobile phone, he makes a 5% commission, i.e.

$\frac{5}{100} \times 50{,}000$

= Rs 2,500

قابلیت ۲

کمیشن، انکم ٹیکس، پراپرٹی ٹیکس، جنرل سیلز ٹیکس، ویلیو ایڈیڈ ٹیکس، زکوٰۃ اور عشر کی وضاحت کر سکیں۔

محرک: سبق کی تدریس سے ایک دن قبل طلبہ کو یہ ہدایت دیں کہ وہ گھر سے کوئی بھی کمپیوٹرائزڈ بل اپنے ساتھ لے کر آئیں۔ طلبہ بل لے آئیں تو ان سے کہیں وہ اسے غور سے دیکھیں کہ آیا قیمت فروخت (selling price) میں کوئی ٹیکس شامل کیا گیا ہے یا نہیں۔ پھر طلبہ کو بتائیے کہ حکومت اشیا اور خدمات پر مخصوص فی صد کے حساب سے ٹیکس عائد کرتی ہے جو ملک کے بجٹ کو منظم کرنے میں مدد دیتا ہے اور حکومت کو عوام کو مختلف سہولتیں فراہم کرنے کے قابل بناتا ہے۔ مختلف قسم کی چیزوں پر ٹیکس عائد کیے جاتے ہیں جیسے زمین، جائیداد آمدنی، اشیائے فروخت اور خدمات وغیرہ۔ ٹیکس کی مد میں فی صد کا فیصلہ سالانہ کیا جاتا ہے۔ اس قابلیت پر عبور حاصل کرنے کے لیے طلبہ کو اپنے علم اور فی صد میں مہارت پیدا کرنے کی ضرورت ہوتی ہے ٹیکس کی مختلف اقسام کی وضاحت کیجیے اور اس مد میں رقم کا تخمینہ لگانے میں ان کی مدد کیجیے۔ ہر قسم کے ٹیکس کی وضاحت کیجیے۔

- انکم ٹیکس وہ ٹیکس ہے جو کسی فرد کی سالانہ آمدنی پر لگایا جاتا ہے۔
- پراپرٹی ٹیکس یہ ٹیکس کسی بھی جائیداد زمین، مکان یا دکان پر عائد کیا جاتا ہے۔
- جنرل سیلز ٹیکس یہ ٹیکس خریدار کی طرف سے بیچنے والے کو فروخت کی قیمت پر ادا کرتا ہے۔
- ویلیو ایڈیڈ ٹیکس یہ ٹیکس تمام تجارتی سرگرمیوں پر عائد کیا جاتا ہے۔

انھیں بتائیے کہ کسی دی گئی مقدار کا انکم ٹیکس معلوم کرنے کے لیے سب پہلے ٹیکس فیصد کو کسر (fractional form) میں تبدیل کریں اور پھر اسے دی گئی مقدار سے ضرب دیں۔ طلبہ کو بتائیے کہ جب کسی مقدار کا فی صد percentage معلوم کرنی ہو (جیسے کہ قابل ٹیکس آمدنی، پراپرٹی ٹیکس کی رقم وغیرہ) تو حساب کتاب کا آسان طریقہ یہ ہے کہ سوال کے لفظ 'کا' 'of' کو ضرب × کے نشان سے بدل دیں۔ مثال کے طور پر اگر سوال میں کہا گیا ہو کہ سالانہ آمدنی 15,00,000 روپے پر 8% فی صد انکم ٹیکس معلوم کیجیے تو ہم اس کا حساب اس طرح کریں گے۔

$\frac{8}{100} \times 1,500,000$

$= \text{Rs } 120,000$

یعنی 1,500,000 روپے سالانہ آمدنی پر 8% فی صد انکم ٹیکس 120,000 روپے ہوگا۔ اسی طرح دیگر ٹیکسوں کا بھی حساب کتاب کیا جا سکتا ہے۔ کیونکہ ٹیکس کسی خاص فی صد کے تحت وصول کیا جاتا ہے۔ طلبہ کو سوال غور سے پڑھنے اور اس میں دی گئی فی صد کی نشان دہی کرنے کے لیے کہیں۔ جب طلبہ مختلف اقسام کے ٹیکسوں کو سمجھ کر ان کا حساب کتاب لگانے لگیں تو انھیں سمجھائیے کہ کمیشن کیا ہے۔ انھیں بتائیے کہ کمیشن ایک ایجنٹ کی فیس ہے جو وہ کسی چیز یا خدمت فروخت کرنے پر وصول کرتا ہے۔ یہ فیس ایک مقررہ رقم بھی ہو سکتی ہے یا کل قیمت کا خاص فی صد بھی ہو سکتا ہے ہر ایجنٹ مختلف فی صد وصول کرتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر ایک ایجنٹ ایک 50,000 روپے کے موبائل پر 5% فی صد کمیشن لیتا ہے تو وہ ایسے پانچ موبائل فون کی فروخت سے کتنی رقم کمائے گا۔

ایک موبائل پر وہ 5% کمیشن لیتا ہے تو:

$\frac{5}{100} \times 50,000$

$= \text{Rs } 2,500$

So, on the sale of 5 mobile phones, he would make:

Rs 2,500 × 5

= Rs 12,500

Have the students solve questions from the textbook regarding taxes and commissions and then move onto what Zakat and Ushr are. Tell the students that Muslims all around the world are required to pay a 'wealth tax' of 2.5% or $2\frac{1}{2}$% on their yearly savings which can be in the form of money, gold, or any other asset, only if the worth of those saving surpasses a certain threshold. The threshold is wealth equivalent to the value of 7.5 tola of gold or 52.5 tola of silver. Any Muslim who possesses a wealth more than the threshold is obligated to pay this tax called Zakat. It is paid to the poor and the needy. Similarly, any Muslim who has agricultural asset is required to pay a tax of 10% on hi total yield, if the land receives water from natural sources such as rives or streams, underground springs etc. This tax reduces to 5% if the land receives water from artificial sources, such as tubewells. This tax is calculated the same way as other taxes are calculated. Using the examples and questions from the textbook, strengthen their concepts and attain mastery.

لہٰذا 5 موبائل فون فروخت کرنے پر اسے ملے گا:

Rs 2,500 × 5

= Rs 12,500

طلبہ سے ٹیکس اور کمیشن سے متعلق درسی کتاب سے سوالات حل کرنے کے لیے کہیں اس کے بعد انھیں زکوٰۃ اور عشر کے بارے میں بتائیے کہ دنیا بھر کے مسلمانوں کو اپنی سالانہ بچت پر 2.5% یا $2\frac{1}{2}$% کا مالیاتی ٹیکس ادا کرنا ہوتا ہے۔ یہ بچت پیسے، سونے یا کسی اور اثاثے کی شکل میں بھی ہو سکتی ہے۔ البتہ زکوٰۃ صرف اس صورت میں واجب ہے جب یہ بچت ایک خاص حد سے تجاوز کر جائے یعنی اگر حد 7.5 تولہ سونے (gold) یا 52.5 تولہ چاندی (silver) کی مالیت کے برابر ہے کوئی بھی مسلمان جس کی دولت اس حد سے زیادہ ہو اس پر یہ ٹیکس ادا کرنا فرض ہے۔ زکوٰۃ غریبوں اور محتاجوں کو دی جاتی ہے۔ اسی طرح کوئی مسلمان جو زرعی زمین (agricultural asset) کا مالک ہو اس پر 10% فی صد ٹیکس (عشر) ادا کرنا واجب ہوتا ہے۔ اگر زمین کو پانی قدرتی ذرائع جیسے دریا، نہریں، چشمے، ندی یا وغیرہ سے حاصل ہوتا ہو اگر زمین مصنوعی ذرائع جیسے ٹیوب ویل سے پانی حاصل کرتی ہے تو یہ ٹیکس یعنی عشر 5% فی صد تک کم ہو جاتا ہے۔ اس ٹیکس کا حساب بھی ٹیکسوں کی طرح لگایا جاتا ہے۔ طلبہ کے تصورات کی پختگی کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو استعمال کیجیے تا کہ وہ اس قابلیت میں مہارت پیدا کر سکیں۔

Unit 6 Algebraic Expressions

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Recognise simple number patterns from various number sequences
- Continue a given number sequence and find term-to-term rule and position-to-term rule
- Find terms of sequence when *n*th term is given

Rationale: Number patterns lay the foundation of algebra. Understanding this competency is essential for students to transition from arithmetic to algebra by helping them identify the relationship between numbers. Students already know how to use basic arithmetic operations on numbers to get the desired result. In this competency, they will learn to understand how arithmetic is used to form relationship between numbers and make patterns. Mastery in number patterns also help the students enhance their logical thinking skills and build real-life connections. Patterns are everywhere in nature, music, art, architecture, and technology.

Students have learnt to recognise and extend patterns by finding term-to-term and position-to-term rule. Understanding the rules enhances problem-solving skills and help them solve more complex problems.

Stimulus: Start the lesson by recalling the students' basic number patterns. You can choose the number patterns given as examples in the book or make one of your one such as: 36, ______, _______, 18, ______, ______. Recall that the term-to-term rule tells us how to get from one number to the next in a sequence. In the case of this example, the term-to-term rule was to subtract 6. Students may often assume the rule of the pattern based on the first few terms, therefore emphasize should be put of recognising the relationship between each term and encourage careful observation.

Move onto revising the position-to-term rule. Explain to them that position-to-term rule tells us how to find any number in a sequence using its position. From the above example, the sequence was 36, 30, 24, 18, 12, 6. So, we know the following observations:

1^{st} position = 36

2^{nd} position = 30

3^{rd} position = 24

4^{th} position = 18

5^{th} position = 12 … and so on.

To find the position-to-term rule, you may teach students the following formula as one of the strategy: $a = dn + b$, where a the rule, d is the difference between each term, n is the position of the

الجبری اظہارات

قابلیت ا

- مختلف عددی سلسلوں میں سادہ عددی نمونوں (Simple number patterns) کو پہچان سکیں۔
- کسی دی گئی عددی ترتیب میں term-to-term rule اور position-to-term rule کو تلاش کرسکیں۔
- کسی بھی دی گئی عددی ترتیب میں کسی عدد کو nth term کی مدد سے معلوم کرنا۔

استدلال: عدد کے نمونے الجبرا کی بنیاد رکھتے ہیں۔ طلبہ کے لیے اس قابلیت کو سمجھنا اشد ضروری ہے تاکہ وہ حساب (arithmatic) سے الجبرا (algebra) تک کا سفر آسانی سے طے کرسکیں۔ طلبہ پہلے سے جانتے ہیں کہ اعداد پر ریاضی کے مختلف عوامل (Arithmatic operation) کا اطلاق کرکے مطلوبہ نتائج کو کیسے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس قابلیت میں وہ یہ بھی سمجھیں گے کہ اعداد کے درمیان تعلق بنانے اور pattern بنانے کے لیے ریاضی (arithmatic) کا طرح استعمال کرتے ہیں۔

اعداد کے نمونوں میں مہارت حاصل کرنا طلبہ کی منطقی سوچ کی مہارتوں اور حقیقی زندگی سے جڑے مسائل کو سمجھنے میں بھی مدد دیتا ہے۔ فطرت میں یہ نمونے ہر جگہ موجود ہیں جیسے موسیقی آرٹ یا فنِ تعمیرات اور ٹیکنالوجی وغیرہ طلبہ نے term-to-term اور position-to-term قواعد کے تحت اعداد کے پیٹرن کو پہچاننا اور بڑھانا سیکھ لیا ہے۔ قواعد کو سمجھنا ان کی روزمرّہ زندگی سے جڑے مسائل کو سمجھنے اور حل کرنے کی مہارت کو بہتر بناتا ہے۔ اور انھیں مزید پیچیدہ مسائل کو حل کرنے میں مدد فراہم کرتا ہے۔

محرک: طلبہ کے ساتھ بنیادی اعداد کے نمونوں (pattern) کو یاد کرواتے ہوئے سبق شروع کیجیے۔ آپ درسی کتاب میں مثال کے طور پر دیے گئے number pattern کا انتخاب کرلیں۔ یا پھر اپنی کوئی مثال بنالیں جیسے 18 _____، _____، 36، _____، _____، یاد رکھیے کہ term-to-term کا قاعدہ ہمیں بتاتا ہے ترتیب میں ایک عدد سے دوسرے عدد تک کیسے جانا ہے اس مثال میں term-to-term rule یہ تھا کہ ہر عدد میں سے 6 کم کرنا یا گھٹانا۔ اکثر طلبہ ابتدائی چند اعداد کو دیکھ کر ہی ترتیب کے قاعدے کا اندازہ کر لیتے ہیں۔ اس لیے ہر عدد کے باہمی تعلق کو سمجھنے پر زور دیجیے اور انھیں محتاط مشاہدے کی حوصلہ افزائی پر زور دیجیے۔

اس کے بعد انھیں position-to-term rule کی دہرائی کروایئے اور بتایئے کہ کسی بھی عددی سلسلے یا ترتیب میں موجود عدد کو اس کی position کے ذریعے کیسے تلاش کرتے ہیں۔ مذکورہ بالا مثال میں عدد ترتیب تھی 36، 30، 24، 18، 12، 6 اہم مندرجہ ذیل مشاہدات observations کرتے ہیں۔

1^{st} position = 36

2^{nd} position = 30

3^{rd} position = 24

4^{th} position = 18

5^{th} position = 12 … and so on.

Position-to-term rule کے تحت پوزیشن تلاش کرنے کے لیے آپ طلبہ کو حکمت عملی کے طور پر یہ فارمولا سکھا سکتے ہیں: $a = dn + b$

جہاں a سے مراد قاعدہ (rule)، ہر عدد کے درمیان سے فرق (difference) n سے مراد (position) عدد کا مقام اور b سے مراد ایک

term, and *b* is the previous term. So, to find the rule, we first find the term before the first term. If the difference between each term is to subtract 6, the term before the first term will be 36 + 6 = 42. So, based on this information, the rule will be

$a = dn + b$

rule = $-6(n) + 42$

So, to find the position-to-term rule of the above given sequence $-6(n) + 42$. The rule will allow us to find the term for any position without figuring out the entire sequence. For example, for the 30^{th} position, the term will be: $-6(30) + 42 = -180 + 42 = -138$.

Here, students often confuse term-to-term rule with position-to-term rule, therefore, when explaining, ask questions like 'how can you find the term for the next position?' or can you find the term on the 15^{th} position without writing the entire sequence?'. Students also come to the wrong conclusion, for example, they may write $-6(n)$ instead of $2 - 6(n) + 42$. Prompt them into using their rule on multiple positions to see if it is correct. An odd sequence will ultimately hint them on the wrong rule.

In this grade, however, the position -to-term rule is already provided and the students are required to find the *n*th term. This can be easily done by substituting the nth term into the formula and calculating the term at the required position. For example, find the 15^{th} term if the rule is $3n - 1$. So,

$3n - 1$

$= 3(15) - 1$

$45 - 1$

$= 44$

The 15^{th} term of $3n - 1$ will be 44.

Using the examples from the book, further strengthen their concept and test their skills using worksheets.

Competency 2:

- Recognise variables as a quantity which can take several numerical values
- Recognise open and close sentences, like and unlike terms, variable, constant, expression, equation, and inequality
- Recognise polynomials as algebraic expressions in which the power of variables are whole numbers
- Identify monomial, binomial, and trinomial as a polynomial

عدد سے پہلے کا عدد ہے۔ لہٰذا قاعدہ (rule) معلوم کرنے کے لیے سب سے پہلے ہمیں (term) کو تلاش کرنا ہو گا۔یعنی ایک عدد (term) سے پہلے کا عدد (term) اگر ہر term کے درمیان فرق 6 کو کم کرنا یا گھٹانا ہے تو پہلے عدد (term) سے پہلے موجود عدد (term) ہو گا 6 + 36 = 41 اس لیے اس معلومات کی بنیاد پر قاعدہ (rule) یہ ہو گا:

$a = dn + b$

rule = $-6(n) + 42$

لہٰذا اوپر دی گئی ترتیب 42 + $-6(n)$ کے لیے position-to-term rule ہے: یہ rule ہمیں پوری ترتیب کا پتہ لگائے بغیر بھی کسی بھی مقام (positon) پر موجود عدد کو معلوم کرنے میں مدد دیتا ہے۔مثال کے طور پر اگر ہمیں 30 ویں پوزیشن پر موجود عدد (term) معلوم کرنا ہو تو $-6(30) + 42 = -180 + 42 = -138$:ہے۔

اکثر طلبہ یہاں term-to-term rule اور position-to-term rule کے درمیان فرق کو سمجھنے میں الجھ جاتے ہیں لہٰذا جب آپ اس تصور کو سمجھائیں تو ساتھ ہی طلبہ سے سوالات بھی کرتے جائیں جیسے: ’اگلے مقام (position) پر موجود عدد کیسے معلوم کریں گے‘؟ یا ’کیا آپ پوری ترتیب کو لکھے بغیر 15ویں پوزیشن پر موجود عدد کو معلوم کر سکتے ہیں؟ طلبہ غلط نتیجہ اخذ کرتے ہیں مثال کے طور پر وہ 42 + $2–6(n)$ لکھنے کے بجائے $-6(n)$ لکھ دیتے ہیں۔ طلبہ کو ان کے بنائے قاعدے (rule) کو مختلف پوزیشن پر استعمال کر کے آزمانے کی ترغیب دیجیے تاکہ وہ جانچ سکیں کہ ان کا فارمولا درست ہے یا نہیں۔ اگر ترتیب کچھ عجیب ہو جائے تو یہ قاعدے (rule) میں غلطی کی نشان دہی کرتا ہے۔

اس جماعت میں position-to-term کا قاعدہ پہلے ہی دے دیا گیا ہے اور طلبہ سے نویں term کو معلوم کرنے کے لیے کہا جاتا ہے یہ کام فارمولے میں nth کی term رکھ کر اور مطلوبہ پوزیشن پر term کا حساب لگا کر بہ آسانی کیا جا سکتا ہے۔مثال کے طور پر 15 ویں ٹرم (15th term) معلوم کرنے کے لیے اگر قاعدہ (rule) ہے 3n – 1 تو

$3n - 1$

$= 3(15) - 1$

$45 - 1$

$= 44$

یعنی $3n - 1$ کے لیے 15 ویں term ہو گی 44 درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کا استعمال کرتے ہوئے طلبہ کے تصور کو مزید پختہ کیجیے اور ان کی مہارت کو ورک شیٹس کے ذریعے جانچیے۔

قابلیت ۲

- متغیرات (variables) کو کوئی numerical value رکھنے والی مقدار کے طور جان سکیں۔
- Open and close sentences، like and unlike terms، variables، مستقل (constant)، expressions، equation اور inequality کو پہچان سکیں۔
- Polynomial کو بہ طور الجبری اظہار algebraic expression کے طور پر پہچانا جس میں متغیرات کی قوتیں (power of variables) مکمل اعداد (whole numbers) ہیں۔
- binomial، monomial اور trinomial کو بہ طور Polynomials کے شناخت کر سکیں۔

Stimulus: Begin the lesson with recalling with the students that in algebra, a letter of English alphabet, or even a symbol can represent any numerical value. Start the lesson by writing a mathematical sentence on the board, such as 4 + ________ = 8. Ask the students what we can fill in the blank to make the statement true. The students are most likely to say 4. Let them know that the sentence or statement, in mathematics, is an open statement as it gives incomplete information to determine whether it is true or false. The blank, in algebra, can be represented as a letter. So, in terms of an algebraic equation, it can be expressed as $4 + x = 8$, where x is a variable. Reintroduce the vocabulary 'terms', 'constant', 'variable', 'algebraic expression', and 'coefficient'.

term	number or a letter that is separated by a operator (+, –)
variable	is a symbol that represents a quantity with an unknown value
constant	a term that has a fixed value
algebraic expression	any numeral, variable, or a combination of numeral and variable, connected by one or more signs of number operation
coefficient	symbol or number that appears before the variable

Once they are familiar with the key vocabulary of algebra, move onto explaining to them the difference between like and unlike terms. Use different examples to help the students sort the like and unlike terms. This will help the students in performing number operations, such as addition and subtraction, of algebraic expressions. The like terms have the same variables and are always added or subtracted from the like terms only. Therefore, it is very necessary to rearrange the terms in such a way that all the like terms are together. For example, in case of adding $2y$ to $6y$, the answer is $8y$. However, $4y$ and $6x$ cannot be added because they are unlike terms having different variables. Extra practice needs to be done for this topic as students often make mistakes in adding the like and unlike terms together. They may write $8yx$ which is wrong when adding algebraic terms. Point out that when terms are added, the power of the sum is the same as that of the terms which are added. That is the power does not change. For example, when x^2 and $5x^2$ are added, the sum is $6x^2$. However, in case a term has the same variable but different exponents, they are considered as unlike terms.

Similarly, like terms are subtracted from like terms only. $6y$ can be subtracted from $10y$ to $4y$, but $8x$ cannot be subtracted from $9y$. When rearranging all the like terms together, ask the students to be careful of the sign before the term as the sign moves along with the term.

Once the students have revised all the previously learnt concepts, move onto introducing them to the terms, polynomials', 'monomials', 'binomials', and 'trinomials. Let them know that a polynomial is an expression which consists of variables and coefficients and mathematical operators. A polynomial

محرک: سبق کا آغاز اس یاد دہانی کے ساتھ کیجیے کہ الجبرا میں ایک انگریزی حرف (letter) یا کوئی علامت (symbol) کسی بھی عددی قیمت (numerical value) کی نمائندگی کرسکتی ہے۔ اس وضاحت کے ساتھ بورڈ پر ریاضی کا ایک جملہ لکھیے جیسے 4 + _______ = 8 طلبہ سے پوچھیے کہ ہم اس بیان کو درست ثابت کرنے کے لیے خالی جگہ میں کیا بھر سکتے ہیں۔ زیادہ تر طلبہ کا جواب ہوگا 4 انھیں بتائیے کہ ریاضی میں ایسے بیان یا جملے کو 'open statement' کہا جاتا ہے۔ کیونکہ یہ مکمل معلومات فراہم نہیں کررہا کہ جس کی بنیاد پر یہ یقین کیا جاسکتے کہ آیا یہ درست ہے یا غلط یہ تعین کرنے کے لیے کہ آیا یہ درست ہے یا غلط یہ مکمل معلومات فراہم نہیں کررہا۔ خالی جگہ کو الجبرا میں کسی حرف (letter) سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ تو الجبرا میں مساوات کی شکل میں یہ ہوگا $4 + 8 = x$ جہاں x ایک متغیر (variable) ہے۔ پھر دوبارہ ان الفاظ کو دہرایئے 'term'، 'constant' 'variable' 'algebraic expressions' اور coefficient

term	کوئی عدد یا حرف (letter) جو کسی operator (+, −) کے ذریعے الگ کیا گیا ہو۔
variable	ایک علامت (symbol) جو کسی ایسی مقدار کی نمائندگی کرے جس کی value معلوم نہ ہو۔
constant	ایک (term) جس کی value مقرر (fixed) یا نہ تبدیل ہونے والی ہو۔
algebraic expression	کوئی عدد، متغیر variable یا ان کا مجموعہ (combination) جو ایک یا زیادہ ریاضی کی علامتوں کے ساتھ جڑا ہو۔
coefficient	علامت (symbol) یا عدد جو کسی متغیر (variable) سے پہلے لکھا ہو۔

طلبہ الجبرا کی بنیادی اصطلاحات سے واقف ہوجائیں تو انھیں like اور unlike terms کا فرق سمجھایئے۔ اس کے لیے مختلف مثالوں کو استعمال کیجیے تاکہ طلبہ بہ آسانی ان کو ڈھونڈ کر الگ کرسکیں۔ یہ مشق طلبہ کو (algebraic expression) کے جمع اور تفریق جیسے عددی عوامل کو انجام دینے میں مدد دے گی۔ like term میں variables ایک جیسے ہوتے ہیں لہٰذا انھیں صرف like term ہی کے ساتھ جمع یا نفی کیا جاتا ہے۔ لہٰذا ضروری ہے کہ terms کو اس طرح ترتیب دیا جائے کہ تمام like term ایک ساتھ لکھا جائے مثال کے طور پر $2y$ میں $6y$ کو جمع کریں تو جواب ہوگا $8y$ تاہم $4y$ اور $6x$ کو جمع نہیں کیا جاسکتا کیونکہ یہ unlike terms ہیں جن کے variables بھی مختلف ہیں۔ طلبہ کو اس topic پر اضافی مشق کی ضرورت ہے کیونکہ اکثر طلبہ like and unlike terms کو جمع کرتے ہوئے غلطیاں کرتے ہیں مثلاً وہ '$8yx$' لکھ سکتے ہیں جو الجبرا کے لحاظ سے terms کو جمع کرنے کی غلطی ہے۔ اس کی نشان دہی کرتے ہوئے بتایئے کہ جب terms کو جمع کیا جاتا ہے تو جواب کے ساتھ وہی power لگائی جائے گی جو جمع کی جانے والی term کے ساتھ موجود ہے۔ یعنی power تبدیل نہیں ہوتی۔ مثال کے طور پر جب x^2 اور $5x^2$ کو جمع کیا جائے تو جواب میں حاصل ہوگا $6x^2$ البتہ کسی term میں متغیر variable ایک ہو لیکن طاقت یا قوت نما exponent مختلف ہوں تو انھیں مختلف یا غیر مماثل (unlike terms) سمجھا جاتا ہے۔

اسی طرح like term سے نفی کیا جاتا ہے جیسے $10y$ میں سے $4y$ کو نفی کرنے پر $4y$ حاصل ہوگا۔ لیکن $9y$ میں سے $8x$ کو نفی نہیں کیا جاسکتا۔ تمام like terms کو ترتیب دیتے ہوئے طلبہ کو خاص خیال رکھنا چاہیے کہ ہر term سے پہلے جو علامت لگی ہے وہ ہمیشہ term کے ساتھ ہی منتقل ہوتی ہے۔ جب طلبہ گزشتہ سیکھے گئے تمام تصورات کو دہرا چکیں تو انھیں binomials، monomial، polynomials اور trinomials کی اصطلاحات سے متعارف کروایئے۔

ان کو بتایئے کہ پولی نومیل ایک ایسا expression ہے جو متغیرات (variables)، coefficient اور ریاضی کے عوامل mathematical operators پر مشتمل ہوتا ہے۔ ایک پولی نومیل بعض اوقات مونومیل بھی ہوسکتا ہے یعنی ایک ایسا expression ہے جو صرف ایک term پر

may be a monomial, that is an expression consisting of one term that may be a single numeral, variable or the product of numeral and one (or more) variables. It may also be a binomial, that is an expression consisting of two terms, and a trinomial, as the name suggests, consisting of three terms. The degree of a polynomial is determined by finding the highest exponent of any terms in the expression. For example, the highest exponent of $4x^2 - 3x^3 + 2x^5$ is 5, and hence the degree of this expression in 5.

Competency 3:

- Add and subtract two or more polynomials
- Find the product of monomial with monomial, monomial with binomial/trinomial, and binomial with binomial/trinomial
- Simplify algebraic expressions involving addition, subtraction, multiplication, and division

Stimulus: Before moving on to applying number operations on the polynomials, it should be revised that like terms add or subtract with like terms only, whereas unlike terms cannot be added or subtracted. Addition of algebraic expressions can be done horizontally and vertically. When carrying out vertical addition and subtraction of terms, emphasize to the students that like terms are always placed under each other. Also point out to them to be careful of the sign with the term. All similar signs are grouped together for ease. When adding polynomials vertically, students often tend to misalign the like terms and not to leave any space under the term absent in the second expression. For example, if $4x + 5y + z$ is added to $3x + 3z$, a space should be left blank under the y-term, that is

$4x + 5y + z$
$\underline{3x + 3z}$
$7x + 5y + 4z$

In case of addition or subtraction of algebraic expression, the sign rule for the terms is the same as integers. Use the table below to recap the integer sign rule:

Number operation	Rule	Example
$+x + y$	Add and keep the positive sign	$+4 + 3 = +7$
$-x - y$	Add and keep the negative sign	$-2 - 3 = -5$
$-x + y$ or $+x - y$	Subtract but keep the sign of the larger numerical value	$5 - 3 = 2$ or $-5 + 3 = -2$

مشتمل ہو جو ایک عدد (single numeral) ایک متغیر (variable) یا پھر ایک عدد (numeral) یا ایک اور کئی variable کی پروڈکٹ یعنی حاصل ضرب بھی ہوسکتا ہے۔بعض صورتوں میں ایک polynomial، ایک binomial بھی ہوسکتا ہے جو دو terms پر مشتمل ہوتا ہے۔ اور ایک trinomial جیسا کہ نام سے ظاہر ہے کہ یہ تین terms پر مشتمل ہوتا ہے۔ ایک palonomial کی ڈگری کا تعین کسی expression میں موجود terms کے highest exponent بنیاد پر کیا جاتا ہے۔مثال کے طور پر اس expression میں $4x^2 - 3x^3 + 2x^5$ سب سے بڑا قوت نما highest exponent 5 ہے۔ پس اس expirssion کی ڈگری x^5 ہوگی۔

قابلیت ۳

- دو یا دو سے زائد polynomials کو جمع اور تفریق کرسکیں۔
- monomial کی monomial سے، monomial کی binomial/trinomial، اور binomial کی binomial/trinomial سے حاصل ضرب (product) معلوم کرسکیں۔
- کسی algebraic expressions کو جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کرکے آسان بنا سکیں۔

محرک: polynomials پر عددی عوامل (number operation) کے اطلاق کا موضوع چھیڑنے سے پہلے طلبہ کو ایک بار بتایئے صرف like terms کو like terms سے جمع یا تفریق کیا جا سکتا ہے۔ جب کہ unlike terms کو جمع یا تفریق نہیں کیا جا سکتا۔ الجبرائی expressions صرف اُفقی یا عمودی طور پر جمع کیا جاتا ہے۔طلبہ کو سمجھاتے ہوئے اس پر زور دیجیے کہ term کے ساتھ لگی علامتوں کو بھی بہ غور دیکھیں کیونکہ آسانی کے لیے تمام ایک جیسی علامتوں کو ایک ساتھ رکھا جاتا ہے۔عموماً جب polynomials کو عمودی طور جمع کیا جاتا ہے تو اکثر طلبہ انھیں لکھتے ہوئے یہ غلطی کرتے ہیں کہ وہ like terms کو غلط ترتیب میں رکھتے ہیں اور second expression کے نیچے کوئی خالی جگہ نہیں چھوڑتے مثال کے طور پر اگر $4x + 5y + z$ کو $3x + 3z$ میں جمع کیا جائے تو y والی term کے نیچے خالی جگہ چھوڑی جانی ضروری ہے یعنی:

$4x + 5y + z$

$\underline{3x + 3z}$

$7x + 5y + 4z$

algebriac expression کو جمع یا تفریق کرتے ہوئے وہی اصول لاگو کیے جاتے ہیں جو صحیح اعداد (integers) کے لیے استعمال ہوتے ہیں صحیح اعداد (integers) کی علامتوں کی دہرائی کے لیے درج ذیل جدول کا استعمال کیجیے:

مثالیں	قاعدے	عددی عوامل
$+4 + 3 = +7$	جمع کرتے ہوئے مثبت + کی علامت رکھیں۔	$+x + y$
$-2 - 3 = -5$	جمع کرتے ہوئے منفی − کی علامت رکھیں۔	$-x - y$
$5 - 3 = 2$ or $-5 + 3 = -2$	نفی کرتے ہوئے بڑی numerical value کے ساتھ لگی علامت کو لگایئے۔	$-x + y$ or $+x - y$

The above rules will apply to the coefficients leaving the variable part unchanged. Before solving any question, emphasize to the students to group all like terms together (and place them under each other in case of vertical addition or subtraction). Use different examples from the textbook and help the students strengthen this concept.

Move onto multiplication of polynomials next. When two terms are multiplied, it results in a new term. Furthermore, the sign rule of integers also applies to the multiplication of polynomials, that is if two positive terms or two negative terms multiply, it results in a positive term and when one positive and one negative term multiply, it results in a negative term. However, some other properties are also considered. Unlike addition or subtraction, two unlike terms can be multiplied with one another, that is $x \times y = xy$. Similarly, when two coefficients are multiplied, the base and the exponent remain the same. Similarly, when two powers having the same base are multiplied, the exponents are added.

$a \times a = a^2$

and $a \times a \times a = a^3$

$a^3 \times a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5$

so $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$

Multiplication of polynomial can be summarized as:

- Multiplication of a monomial by a monomial,
  $a \times bc = abc$ or $abc \times d = abcd$
- Multiplication of a binomial by a monomial,
  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ or $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$
- Multiplication of a monomial by a trinomial,
  $a \times (b + c + d) = (a \times b) + (a \times c) + (a \times d)$
- Multiplication of a binomial by another binomial,
  $(a + b) \times (c + d) = (a \times c) + (a \times d) + (b \times c) + (b \times d)$
- Multiplication of a binomial by a trinomial,
  $(a + b) \times (c + d + e) = (a \times c) + (a \times d) + (a \times e) + (b \times c) + (b \times d) + (b \times e)$

Therefore, it should be pointed out that when multiplying an algebraic expression by another expression, each term of the first expression is multiplied by each term of the second expression. The result is then simplified by adding like terms. Use different examples from the textbook to help the students easily multiply polynomials.

یہ قاعدہ صرف coefficient پر لاگو ہوگا اور variable کو یوں ہی رکھا جائے گا۔ طلبہ کسی بھی سوال کو حل کرنے سے پہلے اس بات پر زور دیجیے کہ وہ پہلے تمام like terms کو ایک ساتھ رکھیں (عمودی طور پر جمع یا تفریق کرتے ہوئے وہ انھیں ایک دوسرے کے نیچے رکھیں) درسی کتاب میں دی گئی مختلف مثالوں کو استعمال کیجیے تاکہ طلبہ اس مہارت میں پختگی حاصل کرسکیں۔

اگلا موضوع polynomials کی ضرب ہے۔ جب دو terms کو آپس میں ضرب دیا جاتا ہے تو نتیجے میں ایک term حاصل ہوتی ہے۔ مزید برآں polynomials کی ضرب کے عمل میں علامتوں کے ضمن میں وہی قاعدہ لاگو ہوتا ہے جو صحیح اعداد (integers) کے لیے ہے، یعنی دو مثبت terms یا دو منفی terms کو آپس میں ضرب دینے پر نتیجے میں ایک مثبت term حاصل ہوتی ہے۔ لیکن جب ایک مثبت اور ایک منفی terms کو آپس میں ضرب دیں تو نتیجے میں ایک منفی term حاصل ہوتی ہے۔ تاہم کچھ دیگر خصوصیات کو بھی دیکھنا یا سمجھنا ضروری ہے۔ جمع اور تفریق کے برعکس، دو unlike terms کو بھی آپس میں ضرب دیا جا سکتا ہے جیسے $x \times y = xy$۔ اسی طرح جب دو coefficient کو آپس میں ضرب دیا جائے تو اساس (base) اور قوت نما (exponent) وہی رہتے ہیں۔ اسی طرح جب ایک جیسی base والی دو قوتوں (powers) کو ضرب دیا جائے تو ان کے قوت نما (exponent) بھی آپس میں جمع ہوتے ہیں۔

$a \times a = a^2$

and $a \times a \times a = a^3$

$a^3 \times a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5$

اس لیے $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$

polynomial کی ضرب کو مختصراً یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے:

- ایک monomial کی monomial سے ضرب،
  $a \times bc = abc$ or $abc \times d = abcd$
- ایک binomial کی monomial سے ضرب،
  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ or $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$
- ایک monomial کی trinomial سے ضرب،
  $a \times (b + c + d) = (a \times b) + (a \times c) + (a \times d)$
- ایک binomial کی binomial سے ضرب،
  $(a + b) \times (c + d) = (a \times c) + (a \times d) + (b \times c) + (b \times d)$
- ایک binomial کی trinomial سے ضرب،
  $(a + b) \times (c + d + e) = (a \times c) + (a \times d) + (a \times e) + (b \times c) + (b \times d) + (b \times e)$

لہٰذا طلبہ کو یہ بات بھی سمجھانی ضروری ہے کہ جب algebraic expression کو آپس میں ضرب دی جاتی ہے تو پہلی expression میں موجود ہر term کو دوسری expression کی ہر term سے ضرب کیا جاتا ہے اس کے بعد نتیجے میں حاصل ہونے والی term کو جمع کیا جاتا ہے یعنی like term کو آپس میں جمع کر کے نتیجے کو آسان بنایا جاتا ہے۔ درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کو استعمال کیجیے تاکہ طلبہ polynomials کی ضرب کے عمل کو سمجھنے کے بعد بہ آسانی انجام دے سکیں۔

Competency 4:

- Factorise algebraic expressions by taking out common terms and by regrouping

Stimulus: Before moving onto the factorization, introduce algebraic identities to the students. Write the following statement on the board: $3y + 3 = 12$. Ask the students how they can make this statement true. Next, substitute the value of y with 3 and solve the equation. Explain to the students that the statement is only true when we substitute y with 3 and not any other value. Such a statement is called an equation because both sides of the equality signs are the same, for example $y = 12$. Inform the students that since $y = 12$ is a condition, this is a conditional statement. No write the following equation on the board: $2x + 8x = 10x$. Ask the students if the equation is true. Now ask them if x is substituted by 5, will the equation remain true? Help them substitute x with 5 and solve the equation. Like the previous equation, this statement is also true for all values of x and is not limited to any condition. Such an equation is called an algebraic identity. Algebraic identities are used to make calculation easier. There are three identities. Use the book to expand the algebraic identities and prove them. These identities will further be used to factorise algebraic expression. Once the students are familiar with identities, move onto explaining to them how to factorise different expressions. Recall with the students the definition of factors, that is the number(s) that can divide another number without leaving any remainder. Explain to them that, like numbers, algebraic terms also have factors. For example, the factors of $5x$ are $5 \times x$, that is 5 and x. Similarly, the factors of $5x^2y$ are $(5 \times x^2y)$, $(5x \times xy)$, $(5x^2 \times y)$, $(5y \times x^2)$ which can be listed as 5, x^2y, $5x$ xy, $5x^2$, y, $5y$, x^2. However, this might be difficult for students at this level, so we can say $7x^2y$ can be factorised as: $5 \times x \times xy$. Such factorization is called irreducible because it cannot be reduced any further. Explain to the students that there are multiple ways of factorizing an algebraic expression. The first is by finding the common factor.

Write the expression $ab + bc = a(b + c)$ on the board. Explain to the students that for both terms of the expression, the common factor is a. So, for $9x + 27$, we first write the factors of each term, that is:

$9x = 3 \times 3 \times x = 3 \times 3x$
$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3 \times 9$

The common factor is hence 3. So, $9x + 27$ is factorised as $3(3x + 9)$. Therefore, it is proved that if the expression containing two or more terms contains a common factor, then that factor is a factor if each term. Similarly, $ab + a + b + 1$ has $(b + 1)$ as the common factor. When factorised completely, it is $a(b + 1) + 1(b + 1) = (a + 1)(b +1)$.

Once the students can successfully carry out factorization by taking out the common factor, move onto the next method of factorization is regrouping. This method is similar to the previous method except we regroup the terms before finding the common factor. Regrouping is done when common factors are not apparent. For example, $10xy – 5y + 8 – 16x$ has no common factor, therefore the first and the second term are grouped together while the third and fourth terms are grouped. So, it is done in the following way:

قابلیت ۴

- algebriac expression کی factorization کرنے کے لیے مشترکہ terms کو نکال کر انھیں دوبارہ ترتیب دے سکیں۔

محرک: factorisation سے پہلے طلبہ کو algebriac identies سے متعارف کروانے کے لیے بورڈ پر درج ذیل بیان لکھیے: $3y + 3 = 12$ طلبہ سے پوچھیے کہ وہ اس بیان کو کیسے درست بنا سکتے ہیں اس کے بعد y کی value کو 3 بدل دیں اور اس مساوات (equation) کو حل کریں۔ طلبہ کو یہاں یہ بھی بتائیے کہ یہ بیان صرف تب ہی درست ہوگا جب ہم y کو 3 سے بدل دیں۔ اس طرح کے بیان کو ہم مساوات (equation) کہتے ہیں کیونکہ مساوات کے دونوں اطراف ایک جیسے ہوتے ہیں مثال کے طور پر $y = 12$ طلبہ کو بتائیے کہ کیونکہ $y = 12$ ایک condition ہے لہٰذا یہ ایک مشروط بیان (condition statement) ہے۔ اب آپ بورڈ پر یہ مساوات لکھیے: $2x + 8x = 10x$ طلبہ سے پوچھیے کہ کیا یہ مساوات equation درست ہے۔ پھر پوچھیے کہ اگر ہم x کو 5 سے بدل دیں تو کیا تب یہ مساوات درست رہے گی؟ اب x کی جگہ کو 5 سے بدلنے اور مساوات کو حل کرنے میں طلبہ کی مدد کیجیے۔ پچھلی مساوات کی طرح یہ بیان بھی x کی تمام values کے لیے درست ہے اور کسی condition تک محدود نہیں ہے۔ اسی لیے ایسی equation کو (algebraic identity) کہا جاتا ہے۔ حساب کتاب کو آسان بنانے کے لیے algebraic identies کا استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ تین identities ہیں جن کو expand کرنے اور prove کرنے کے لیے درسی کتاب کو استعمال کیجیے۔ آگے جا کر ہم ان پر identities کو algebraic expression کی فیکٹرائزیشن کے لیے استعمال کریں گے۔ جب طلبہ ان ideaties سے واقف ہو جائیں یعنی اچھی طرح سمجھنے لگیں تو انھیں الجبرا کی مختلف expressions کو فیکٹرائز کرنا سکھائیے اس موقع پر factors کی تعریف کا اعادہ کروائیے کہ یہ وہ عدد/اعداد ہے جو کسی دوسرے عدد کو مکمل طور پر تقسیم کر دیتا ہے اور بقیہ (remainders) بھی نہیں بچتا۔ طلبہ کو وضاحت سے بتائیے کہ اعداد کی طرح الجبرا کی term کے بھی factors ہوتے ہیں مثال کے طور پر: $5x$ کے factors ہیں x اور 5 اسی طرح $5x^2y$ کے لیے یہ فیکٹر ہوں گے $(5 \times x \times x \times y)$ انھیں یوں بھی لکھا جا سکتا ہے جیسے $(5,x,x,y)$ ایسی فیکٹرائزیشن کو ناقابل تخفیف کہا جاتا ہے کیونکہ اسے مزید کم (reduce) نہیں کیا جا سکتا: طلبہ کو بتائیے کہ الجبرا کی expression کو فیکٹرائز کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ پہلے طریقے میں مشترکہ فیکٹر کو تلاش کیا جاتا ہے۔

بورڈ پر expression لکھیے: $ab + bc = a(b + c)$ اب طلبہ کو وضاحت سے بتائیے کہ اس expression کی دونوں terms کا مشترکہ فیکٹر ہے 'a' لہٰذا $9x + 27$ کے لیے ہم پہلے ہر term کا factor لکھیں گے یعنی:

$9x = 3 \times 3 \times x = 3 \times 3x$
$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3 \times 9$

اس لیے مشترکہ فیکٹر ہے 3 اس لیے $9x + 27$ کو بہ طور $3(3x + 9)$ کے فیکٹرائز (factorised) کیا جاتا ہے لہٰذا ثابت ہو گیا کہ اگر کوئی expression دو یا زیادہ terms پر مشتمل ہو اور ان میں ایک مشترکہ جزو بھی ہو تو وہ factor ہر term کا فیکٹر ہے۔ لہٰذا $ab + a + b + 1$ میں $(b + 1)$ مشترکہ factor ہے۔ جب اسے مکمل طور پر factorised کیا جائے تو $a(b + 1) + 1(b + 1) = (a + 1)(b + 1)$ حاصل ہو گا۔

طلبہ ایک بار مشترکہ فیکٹر کو نکال کر فیکٹرائزیشن کو کرنے پر قادر ہو جائیں تو انھیں فیکٹرائزیشن کا اگلا طریقہ یعنی regrouping سکھائیے۔ یہ طریقہ پچھلے طریقے جیسا ہی ہے بس فرق یہ ہے کہ اس میں ہم مشترکہ فیکٹر کو تلاش یا معلوم کرنے سے پہلے term کو دوبارہ ترتیب دیتے ہیں regrouping اس وقت تک کی جاتی ہے جب تک کہ مشترکہ فیکٹر ظاہر نہ ہو جائے۔ مثال کے طور پر $10xy - 5y + 8 - 16x$ میں مشترکہ فیکٹر موجود نہیں ہے لہٰذا پہلی اور دوسری term کو اکٹھا ایک گروپ میں رکھتے ہیں اور تیسری اور چوتھی term کو ایک اور گروپ میں درج ذیل طریقے سے رکھتے ہیں۔

$\underline{10xy - 5y} + \underline{8 - 16x}$

$10xy - 5y = 5y(2x - 1)$

$8 - 16x = -16x + 8 = -8(2x - 1)$

The common factor in both groups is $(2x - 1)$.

Thus, the factors of $10xy - 5y + 8 - 16x$ are $(5y - 8)(2x - 1)$.

Use the examples from the textbook to further solidify the students' abilities. Students at times tend to make incorrect factors, therefore ample practice needs to be done. The next method of factorizing an algebraic expression is breaking the middle term. Breaking the middle term is usually applied on quadratic expressions. Explain to the students that the general form of quadratic expression is $ax^2 + bx + c$ where x is a variable and a, b, c are constants and a is not 0. However, when $a = 1$, the expression is $x^2 + bx + c$. To factorise such an expression, a is multiplied with c. Next, factors of the product, ac, are found such that the sum or difference of the factors is equal to the coefficient of the middle term, that is b. Point out to the students that if the product obtained is positive, both the factors will either be positive or negative. Whereas, if the product is negative, one factor would be positive while the other is negative or vice versa. For the expression $x^2 + 9x + 20$, the product of ac is $1 \times 20 = 20$. Next, the factors of 20 such that the sum or difference of two factors is equal to 9. So, the factors of 20 are 1×20, 2×10, 4×5. The sum of 4 and is 9. So, we write b as the sum of 4 and 5. The expression becomes:

$x^2 + 9x + 20$

$x^2 + (4 + 5)x + 20$

$x^2 + 4x + 5x + 20$

$x(x + 4) + 5(x + 4)$

$(x + 4)(x + 5)$

A short tip to help students remember factorization of quadratic expressions is to express it in the following form: x^2 + (sum of constants)x + (product of constants). In case the coefficient of x^2 is not 1 but any other number, the product of numbers is the product of the coefficient of x^2 (c). For example, to factorise $2x^2 + 13x + 20$, the product of the expression is $2 \times 20 = 40$. The possible factors of 40 are: 1×40, 2×20, 4×10, and 5×8. Since the sum must be equal to 13, the most suitable factors are 5 and 8.

$2x^2 + 13x + 20$

$2x^2 + (5 + 8)x + 20$

$2x^2 + 5x + 8x + 20$

$x(2x + 5) + 4(2x + 5)$

$(2x + 5)(x + 4)$

$\underline{10xy - 5y} + \underline{8 - 16x}$

$10xy - 5y = 5y(2x - 1)$

$8 - 16x = -16x + 8 = -8(2x - 1)$

$(2x - 1)$ دونوں گروپوں کا مشترکہ فیکٹر ہے۔

لہٰذا $(5y - 8)(2x - 1)$، $10xy - 5y + 8 - 16x$ کے factors ہیں۔

طلبہ کی قابلیت کو مزید مستحکم کرنے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کو حل کروایئے۔ اکثر طلبہ فیکٹرز کو لکھنے میں غلطی کرتے ہیں لہٰذا انھیں زیادہ سے زیادہ مشق کروایئے۔ الجبرا کی expression کی factorization کا اگلا طریقہ درمیانی term کو توڑنا ہے۔ یہ طریقہ عموماً quadratic expressions پر لاگو ہوتا ہے۔ طلبہ کو واضح طور پر بتایئے کہ quadratic expressions کی عمومی شکل $ax^2 + bx + c$ ہے جہاں x ایک متغیر (variable) ہے اور a، b اور c مستقل (constant) ہیں اور a، صفر نہیں ہے۔ تاہم جب $a = 1$ ہو تو expression $x^2 + bx + c$ ہے جس کی factorization کے لیے a کو c سے ضرب دیا جاتا ہے، اس کے بعد حاصل ضرب (product) یعنی ac ملتا ہے جو کہ فیکٹر کا مجموعہ، middle term یعنی b کے coefficient کے برابر ہے۔ طلبہ کو یہ بات بھی سمجھایئے کہ اگر حاصل ضرب (product) کے ساتھ مثبت کی علامت ہے تو دونوں فیکٹرز یا تو مثبت ہوں گے یا منفی جب کہ اگر product منفی ہے تو کوئی ایک فیکٹر مثبت ہوگا جب کہ دوسرا اس کا برعکس یعنی منفی $x^2 + 9x + 20$ expression کے لیے، ac کا product $1 \times 20 = 20$ ہے۔ جو کہ دو فیکٹرز کا فرق ہے اور 9 کے برابر ہے اس لیے 20 کے فیکٹرز ہیں 1×20, 2×10, 5×4، 4 اور 5 کا حاصل جمع 9 ہے۔ اس لیے ہم 5 اور 4 کے حاصل جمع کو بہ طور b کے لکھتے ہیں۔ اور یوں expression کی صورت یہ ہوگی۔

$x^2 + 9x + 20$

$x^2 + (4 + 5)x + 20$

$x^2 + 4x + 5x + 20$

$x(x + 4) + 5(x + 4)$

$(x + 4)(x + 5)$

quadric expression کی factorization کو یاد رکھنے کی چھوٹی سی tip یہ ہے کہ اسے درج ذیل شکل میں بیان کیا جائے: (دو constant کا حاصلِ ضرب) + x(دو constant کا مجموعہ) + x^2 اگر x^2 کا coefficient 1 نہیں بلکہ کوئی اور عدد ہے تو product حاصل کرنے کے لیے x^2 کے عدد اور مستقل (C) (constant) کو ضرب کرنا ہوگا مثال کے طور پر $2x^2 + 13x + 20$ کو فیکٹرائز کرنے کے لیے expression کے product $2 \times 20 = 40$ ہے یعنی 40 کے ممکنہ فیکٹرز ہیں 1×40, 2×20, 4×10, and 5×8 کیونکہ ان کا مجموعہ (sum) کو 13 ہونا چاہیے۔ لہٰذا 5 اور 8 موزوں ترین فیکٹرز ہیں۔

$2x^2 + 13x + 20$

$2x^2 + (5 + 8)x + 20$

$2x^2 + 5x + 8x + 20$

$x(2x + 5) + 4(2x + 5)$

$(2x + 5)(x + 4)$

The last method of factorization is using algebraic identities. If both terms of the expression are squared with a positive sign in between, the identity used will be the square of sum of two terms, and if both terms of the expression are squared with a negative sign in between, the identity used will be the square of difference of two terms. Use the examples and exercises from the textbook to help students solidify this competency.

الجبرا کی expression کو فیکٹرائز کرنے کا تیسرا اور آخری طریقہ (algebraic identities) کو استعمال کرنا ہے۔ اگر expression کی دونوں terms مربع (squared) ہوں اور ان کے درمیان مثبت کی علامت ہو تو استعمال کی گئی identity دو terms کے مجموعے (sum) کا مربع (squared) ہو گی اور اگر expression کی دونوں squared کی گئی terms کے درمیان منفی کا نشان ہو تو استعمال کی گئی identity دو terms کے فرق کا مربع (squared) ہو گی۔ طلبہ کو اس قابلیت میں پختہ مستحکم کرنے کے لیے درسی کتاب کی مثالیں اور مشقیں کروائیے۔

Unit 7

Linear Equations

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Construct linear equations in two variables such as; $ax + by = c$, where a and b are not zero

Stimulus: The outcome of this competency depends on the student's ability to use prior knowledge regarding linear equations. Recall with the students that an algebraic equation is a statement that expresses a relationship of equality between two or more expressions. In algebra, the equation $a + b = c$ implies that when a number represented by a is added in b, the sum is c. Here, a, b, and c are variables and can have infinite values. Revise with the students that any equation with the variable that has the order/exponent/power of 1 is a linear equation, also known as first degree equations or simple equations. Using the examples from the book, help the students solve linear equations themselves with guided practice to help them recall. Once they do, move onto linear equations with two variables.

Present a scenario to the class: at a shop, there are 2 baskets of apples with unknown numbers of apples. The shop keeper 3 baskets of the same type with unknown number of bananas. He says the total of 2 baskets of apples and 3 baskets of bananas make up 150 apples and bananas. Now, ask the students how they can construct the equation. Lead them to the solution that we can assume there are x number of apples in a basket, so 2 baskets of apples will be $2x$, and if there are y number of bananas, 3 baskets will be $3y$. So, $2x + 3y = 150$. Point out to the students that the general form of linear equation with two variables is $ax + by = c$, where a and b are not non-zero constants, and x and y are variables. Emphasize that a and b are always non-zero to validate the conditions of two variables. Point out to the students that each linear equation of two variables has infinite solutions because the variable may have infinite values. Using the examples and exercises from the textbook help students strengthen this competency.

Competency 2:

- Understand Cartesian system and coordinate plane
- Plot the graph of linear equation $ax + b = 0$ where $a \neq 0$
- Plot the graph of linear equations in two variables
- Recognise and state the equation of horizontal and vertical line
- Find the value of x and y from the graph

باب
۷

خطی مساوات

قابلیت ۱

- دو متغیروں (variables) میں Linear equations بنا سکیں۔ جیسے $ax + by = c$ جہاں a اور b صفر (zero) نہیں ہیں۔

محرک: طلبہ کی اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کی Linear equations کے بارے میں پیشگی معلومات پر منحصر ہے۔ طلبہ کو یاد دلایئے کہ الجبرا کی مساوات (algebraic equations) ایک ایسا بیان ہے جو دو یا دو سے زائد expressions کے درمیان برابری کے تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔ الجبرا مساوات (equation) $a + b = c$ کا مطلب یہ ہے کہ جب کسی عدد a کو عدد 'b' میں جمع (add) کیا جائے تو مجموعہ یا جواب (sum) c حاصل ہو گا۔ یہاں a، b اور c متغیر (variables) ہیں جن کی قدریں (values) لامحدود (infinite) ہوسکتی ہیں۔ طلبہ کے ساتھ مل کر اعادہ کیجیے کہ وہ مساوات (equation) جس میں متغیر (variables) کی طاقت power / قوت نما (exponent) / ترتیب (order) "1" ہو خطی مساوات (Linear euqation) کہلاتی ہے۔ اسے first degree equation یا simple equation بھی کہا جاتا ہے۔ درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کا استعمال کرتے ہوئے طلبہ کو خطی مساوات (Linear equation) خود ہی حل کرنے دیں آپ صرف ان کی رہنمائی کریں تا کہ انھیں سابقہ علم کو یاد کرنے میں مدد ملے اور وہ اعتماد کے ساتھ مشق کر سکیں۔ جب وہ ایک متغیر (variable) والی مساوات کو خود سے حل کرنے لگیں تو انھیں دو متغیر (variables) والی (Linear equation) کو حل کرنا سکھایئے۔

کمرۂ جماعت میں موجود طلبہ کے سامنے زبانی طور منظر کشی کیجیے کہ ایک دکان پر سیب کی 2 ٹوکریاں ہیں جن میں موجود سیبوں کی تعداد معلوم نہیں اور دکان دار کے پاس ایسی تین ٹوکریاں کیلوں کی بھی ہیں جن میں موجود کیلوں کی تعداد بھی معلوم نہیں ہے۔ اس کا کہنا ہے کہ کیلوں اور سیبوں کی کل تعداد 150 ہے۔ اب طلبہ سے پوچھیے کہ وہ اس صورت حال کے لیے مساوات کس طرح بنا سکتے ہیں ان کی رہنمائی کرتے ہوئے حل کی طرف لے جائیں کہ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ٹوکری میں موجود سیبوں کی تعداد x ہے تو دو ٹوکریوں میں یہ تعداد $2x$ ہو گی اور اگر کیلوں کی تعداد y ہے تو تین ٹوکریوں میں یہ تعداد $3y$ ہو گی۔ لہٰذا $2x + 3y = 150$۔ طلبہ کو یہ بات سمجھایئے کہ دو متغیروں (variables) والی (Linear equation) کی عمومی شکل یہ ہو گی $ax + by = c$، جہاں a اور b دو ایسے constants ہیں جو صفر (zero) اور x اور y متغیر (variables) ہیں۔ اس بات پر زور دیجیے کہ دو متغیر (variables) کے غیر صفر ہونے کی شرط کو پورا کرنے کے لیے a اور b کا ہمیشہ غیر صفر ہونا ضروری ہے۔ طلبہ کو یہ نکتہ بھی بتایئے کہ دو variable والی Linear equation کو کئی طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے کیونکہ یہ infinite values والے variables رکھتی ہیں یعنی جن کی values بھی لامحدود (infinite) ہوسکتی ہیں۔ طلبہ کو اس تصور میں پختہ کرنے کے لیے انھیں درسی کتاب میں دی گئی مشقیں اور مثالیں حل کروایئے۔

قابلیت ۲

- Cartesian system کو سمجھیں اور منصوبہ بندی کو مربوط (coordinate) کرسکیں۔
- خطی مساوات (Linear equation) $ax + b = 0$ جہاں $a \neq 0$ کا گراف تیار کرسکیں۔
- دو متغیروں والی Linear equation کا گراف بنا سکیں۔
- افقی (horizontal) اور عمودی (vertical) لائنوں پر مشتمل گراف کو پہچان سکیں اور بیان کرسکیں۔
- گراف کی مدد سے x اور y کی (values) کو معلوم کرسکیں۔

Stimulus: Make two axes that are perpendicular to each other. And label each axes X and Y. On the plane, plot a point with a dot. Ask the students if they can locate the dot. The students are likely to say top right or top left. Point out to them that location on such a plane has exact coordinates that help them understand and know the exact location of a point. Inform the students that Cartesian coordinate system is like a map that has two lines crossing through a common point. The horizontal line is the x-axis while the vertical line is the y-axis. The common point where the horizontal line passes through the vertical line is called the origin. Each point on the plane is defined as (x, y) called the coordinate, where x is the horizontal distance from the origin and y is the vertical distance from the origin. For example, (4, 5) means 4 horizontal units from the origin towards the right and 5 vertical units from the origin upwards. The origin is represented as (0, 0). Students often make the mistake of writing (y, x) instead of (x, y). Therefore, it is very necessary to mention that for coordinates x will always come before y.

Bring a graph paper for the class and draw the axes. Identify the four quadrants on the graph. Plot 4-5 points on the graph and ask the students to identify the coordinates.

Move onto plotting graphs of linear equations in one variable. A linear equation in one variable is of the form $ax + b = 0$. Since the solution of $ax + b = 0$ is unchanged if any number is added, subracted, multiplied, or divided on both sides of the equation. It means there is only one solution of the equation. Therefore, the graphs of linear equations in one variable can either be horizontal or vertical. In terms of x, the line is vertical, that is, for the equation $2x - 4 = 0$, $x = 2$ and the line is a straight vertical line that passes the point (2, 0). Similarly, in terms of y, the line is horizontal, that is, for the equation $10 + y = 9$, the value of $y = -1$. The line passes the point (0, -1). The graph for linear equation of two variables is also a straight line. The general form of linear equation in $ax + by = c$. For convenience, a table of values is used to create coordinates. Random x or y values are chosen to substitute in order to find the unknown value of y and x respectively. For example, for equation $y = 3x + 1$. We replace the value of x for different numbers and record the y value and then plot the graph accordingly.

x	−1	0	2
y	−2	1	7

Once the students are able to plot graphs of linear equations in one and two variables, move over onto explaining to the students that we can determine the equation of horizontal and vertical line. Inform them that as previously studied, horizontal lines go left and right. These are in the form of $y = b$, where b represents the y-intercept. On the other hand, vertical lines go up and down and are in the form of $x = a$, where a represents the x-coordinate of all points. Equations of horizontal and vertical lines only have one variable. For example, the equation $x = 2$ represents a vertical line which crosses the x-axis at the point (2,0). Every coordinate with 2 as x satisfies the equation. Similarly, the equation $Y = -5$ is a horizontal line which intersects the y -axis at (0, −5). Furthermore, use the text in the book to help the students find values for x and y from the graph.

محرک: دو محور (axes) کھینچیے جو ایک دوسرے perpendicular ہوں ان محوروں کو x اور y کے نام دیجیے ہموار سطح plane پر ایک نقطہ لگائیے پھر طلبہ سے اس نقطے کے مقام (point) کے حوالے سے سوال کیجیے کہ اسے کہاں لگایا گیا ہے۔ طلبہ یقیناً اوپر کی طرف دائیں یا بائیں جیسے جوابات دیں گے انھیں بتائیے کہ اس طرح کے plane کے اوپر کسی بھی مقام کے exact coordinates ہوتے ہیں جو کہ مددگار ہوتے ہیں کسی بھی نقطے کی درست پوزیشن کو سمجھنے اور پتہ لگانے میں مدد کرتے ہیں پھر طلبہ کو Cartesian coordinate system کے بارے میں بتائیے جو ایک map کی طرح ہوتا اور اس میں دو لائنیں ایک نقطے پر ایک دوسرے پر قطع cross کرتی ہیں۔ افقی طور واقع لائن کو محور x اور عمودی لائن کو y محور (axes) کہتے ہیں اور ان کے لائنوں کے ملنے یا قطع کرنے کا مقام origin کہلاتا ہے plane پر لگا کوئی بھی point بہ طور (x, y) کے define کیا جاتا ہے جس کو (coordinates) کہتے ہیں جہاں x سے مراد origin سے افقی فاصلے کو اور y سے مراد origin سے عمودی فاصلے کو ظاہر کرتا ہے۔ مثال کے طور پر (5, 4) کا مطلب origin سے سیدھے ہاتھ کی طرف افقی طور پر 4 یونٹ اور 5 کا origin سے اوپر کی جانب عمودی طور پر 5 یونٹ ہے۔ origin کے مقام کو ہم بہ طور (0, 0) ظاہر کرتے ہیں۔ اکثر طلبہ x, y کو لکھنے کے بہ جائے y, x لکھ دیتے ہیں۔ اس کے لیے ضروری ہے کہ طلبہ کو سمجھائیے کہ ہم لکھتے وقت ترتیب میں x کو پہلے اور y کو بعد میں رکھتے ہیں۔

کمرۂ جماعت میں اپنے ساتھ ایک گراف پیپر لائیے اور طلبہ کو یہ axes بنا کر دکھائیے اور گراف پیپر پر 4 چاروں quard کی نشان دہی کیجیے۔ quard کی نشان دہی کے لیے کہیں۔

اب آپ سبق کو آگے بڑھاتے ہوئے طلبہ کو ایک متغیر والی linear equation کے گراف کو بنانا سکھائیے۔ $ax + b = 0$ ایک variable والی linear equation کی شکل ہے۔ کیونکہ اگر ہم اس equation کے دائیں یا بائیں طرف کسی عدد کو جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کریں گے تو جواب یا نتیجے میں کوئی تبدیلی نہیں ہو گی اس کا مطلب ہے کہ اس equation کا صرف ایک Solution ہے اس لیے ایک متغیر (variable) والی linear equation کا گراف افقی ہوگا یا پھر عمودی۔ x کے لحاظ سے یہ لائن vertical ہو گی یعنی مساوات $2x - 4 = 0, x = 2$ کے لیے یہ لائن ایک سیدھی اور عمودی لکیر ہے جو اصل مقام (point) (0, 2) سے گزرتی ہے اس طرح y کے لحاظ سے لائن افقی ہے یعنی مساوات $10 + y = 9$ کے لیے $y = -1$ کی قدر value لائن اصل مقام (point) (0, -1) سے گزرتی ہے وہ متغیرات (variable) کی linear equation کا گراف بھی ایک سیدھی لکیر سے یعنی $ax + by = c$ linear equation کی عمومی شکل ہے۔ سہولت کے لیے value کا ایک جدول بنایا جاتا ہے تاکہ coordinates کو بنایا جا سکے۔ اب آپ x یا y کی جگہ جدول میں دی گئی x یا y کی دی گئی values میں سے کوئی بھی قدر (value) رکھ دیں تو دوسرے کی قدر معلوم ہو جائے گی۔ مثال کے طور پر مساوات (equation) $y = 3x + 1$ کے لیے ہم x کی value مختلف اعداد سے بدل کر رکھتے جائیں اور y کی value کو لکھتے جائیں اور پھر اس کے مطابق ایک گراف تیار کر لیں۔

x	-1	0	2
y	-2	1	7

جب طلبہ ایک اور 2 متغیر variable والی linear equation کا گراف بنانے کا طریقہ سمجھ لیں تو انھیں وضاحت سے بتائیے کہ ہم افقی اور عمودی لائنوں والی مساوات کو بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ انھیں بتائیے کہ ہم پہلے پڑھ چکے ہیں کہ افقی لائنیں، دائیں اور بائیں جانب بڑھتی ہیں ان کی شکل یعنی $y = b$ میں جہاں b وہ قدر ہے جہاں لکیر y محور axes کو قطع intercept کرتی ہے۔ دوسری جانب وہ عمودی لکیریں ہیں جو اوپر اور نیچے جاتی ہیں اور ان کی شکل $x = a$ ہوتی ہے جہاں a قدر ہے جو تمام نقاط کے x–coordinate کو ظاہر کرتی ہے۔ عمودی اور افقی مساواتوں equations میں صرف ایک متغیر (variable) ہوتا ہے مثال کے طور پر equation، $x = 2$ ایک ایسی عمودی لکیر کی نمائندگی کرتی ہے جو x محور (axis) کو نقطہ (2, 0) پر قطع کرتی ہے۔ اسی طرح مساوات equation، $y = -5$ ایک افقی لکیر ہے جو y محور (axis) کو (0, –5) پر عبور (intersects) کرتی ہے۔ مزید برآں گراف سے x اور y کی قدر میں (values) معلوم کرنے کے لیے درسی کتاب میں دیے گئے text یا متن کا استعمال کرتے ہوئے طلبہ کی مدد کیجیے۔

Unit 8

Fundamentals of Geometry

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Learn about the relationship between interior and exterior angles of polygons and differentiate between convex and concave polygons
- Calculate unknown angles in a triangle
- Understand that the sum of interior angles of a triangle is 180° and that the exterior angle of a triangle is equal to the sum of the two pposite interior angles of the triangle

Stimulus: Begin the lesson by showing students different polygons that we observe in everyday life. You may show them triangular road signs, square and rectangular windows and tiles, pentagonal cross-section of a ladyfinger, and hexagonal honeycombs. Ask the students if they notice how these shapes form perfect patterns? Explain to them that each of these shapes are closed and have straight sides. Inform them that al these closed shapes with straight sides are called polygons. This class of shapes have at least three straight sides. Point out to the students that shapes with curved sides are not polygons. Polygons are named according to their sides. For example, a triangle (where tri is three) has three sides, a quadi(four)ilateral has 4 sides and so on. For polygons with more than 10 sides, some of them also have special names, but they are not easy to remember. Point out to the students that to make naming of polygons easier, we call a polygon with n sides an n-sided polygon or an n-gon. For example, a polygon with 12 sides is known as a 12-sided polygon or a 12-gon.

Next, differentiate between regular and irregular polygons. All the shapes that the students identified at the start of the lessons are regular polygons because all of those shapes have equal side length and equal angles. Whereas irregular polygons have angles and sides or different lengths.

Once the students can successfully differentiate between regular and irregular, move onto explaining the element of polygons. You may do so using the textbook. Mention to the students there are two types of angles in a polygon – the interior and exterior angles. As the name suggests, interior angles are angles within the polygon that are formed by the intersection of its side, whereas the angle formed when one side of the polygon is extended outside the shape is the exterior angle.

The interior angle determines whether a polygon is convex or concave. If the interior angles of a polygon are less than 180º, it is a convex polygon and if the interior angles are more than 180º, it is a concave polygon.

بنیادی جیومیٹری

قابلیت ۱

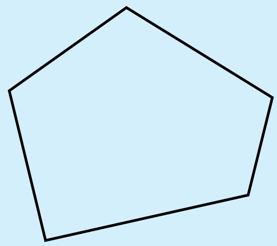
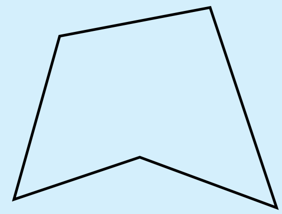
- کثیر الاضلاع (Polygon) کے اندرونی اور بیرونی زاویوں کے درمیان تعلق کو سمجھ سکیں اور محدب (convex) اور مقعر (concave) کثیر الاضلاع میں فرق کر سکیں۔
- مثلث (triangle) میں نامعلوم زاویوں کو معلوم کر سکیں۔
- یہ سمجھ سکیں کہ مثلث کے اندرونی اور بیرونی زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ 180° درجے ہوتا ہے اور یہ بھی کہ مثلث کا ایک خارجی زاویہ مثلث کے دو مخالف داخلی زاویوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

محرک : طلبہ کو مختلف کثیر الاضلاع (Polygon) دکھاتے ہوئے سبق کا آغاز کیجیے جن کا ہم اپنی روزمرّہ زندگی میں مشاہدہ کرتے ہیں مثلاً آپ انھیں سڑک پر لگے مثلثی نشانات جیسے ٹریفک سائن، مربع اور مستطیل کھڑکیاں اور ٹائلیں۔ جھنڈی کے پانچ کونوں والا کراس سیکشن اور شہد کے چھتوں میں بنے چھ کونوں والے خانے دکھا سکتے ہیں۔ طلبہ سے پوچھیے کہ آپ نے نوٹ کیا کہ یہ تمام شکلیں کیسے مکمل نمونے (patterns) بناتی ہیں۔ انھیں بتائیے کہ ہر ایک شکل closed ہے اور ان کے کنارے بھی سیدھے ہیں۔ انھیں یہ سمجھائیے کہ سیدھے کناروں والی یہ بند شکلیں (closed shapes) کثیر الاضلاع (Polygon) کہلاتی ہیں۔ ہر کثیر الاضلاع میں کم از کم تین سیدھی لائنیں ہوتی ہیں۔ اس بات کی بھی نشان دہی کیجیے کہ جن شکلوں میں خم یا کنارے گول ہوں وہ (Polygon) نہیں ہیں۔ کثیر الاضلاع (Polygon) کو ان کے کنارے یا اطراف (Sides) کے مطابق نام دیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر triangle (tri کا مطلب تین ہے) کی تین sides ہوتی ہیں، quadrilateral کی چار sides ہوتی ہیں وغیرہ۔ ایسے کثیر الاضلاع جن کے 10 سے زیادہ sides ان کے کچھ خاص نام بھی ہیں لیکن ان کے نام یاد رکھنا آسان نہیں۔ طلبہ کو یہ بات بھی بتائیے ان کثیر الاضلاع کے ناموں کو آسان بنانے کے لیے ہم n-sided والے کثیر الاضلاع کو n-sided polygons یا n-gon کہتے ہیں مثال کے طور پر وہ polygon جن کے بارہ (sides) ہوں انھیں 12-sided polygon یا 12-gon کہتے ہیں۔

اب طلبہ کو باقاعدہ (regular) اور بے قاعدہ (irregular) کثیر الاضلاع کا فرق سمجھائیے۔ سبق کے آغاز میں طلبہ نے جن اشکال کو پہچانا تھا وہ تمام regular polygons ہیں کیونکہ ان اشکال کے تمام کناروں کی لمبائی برابر اور ان کے زاویے بھی برابر (equal) ہوتے ہیں اس کے برعکس بے قاعدہ کثیر الاضلاع (irregular polygons) اشکال میں زاویے اور ان کے کنارے یا لمبائیاں مختلف ہوتی ہیں۔

ایک بار طلبہ جب regular polygons اور irregular کو فرق کو سمجھ لیں تو انھیں بتائیے کہ polygons کے اجزا (element) کیا ہوتے ہیں یہ کام آپ درسی کتاب کی مدد سے بھی بہ آسانی کر سکتے ہیں۔ طلبہ سے اس کا بھی ذکر کیجیے کہ (Polygon) کثیر الاضلاع میں دو قسم کے زاویے ہوتے ہیں۔ اندرونی (interior) اور بیرونی (exterior) جیسا کہ نام سے ظاہر کہ اندرونی زاویے وہ ہیں جو کثیر الاضلاع (Polygon) کے اندر اس کے اطراف (sides) کے تقاطع (intersection) سے بنتے ہیں۔ جب کہ کثیر الاضلاع polygon کے کسی ایک side کو باہر کی جانب بڑھانے پر جو زاویہ بنتا ہے اسے بیرونی زاویہ (exterior angle) کہتے ہیں۔

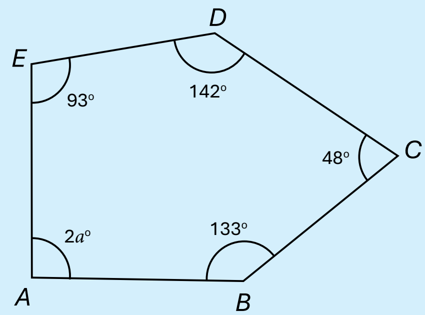
اندرونی زاویہ (interior angle) اس بات کا تعین کرتا ہے کہ کثیر الاضلاع محدب (convex) ہے یا مقعر (concave) اگر کسی کثیر الاضلاع کے اندرونی زاویے 180° سے کم ہوں تو یہ ایک محدب کثیر الاضلاع ہے اور اگر اندرونی زاویے 180° سے زیادہ ہیں تو یہ ایک مقعر کثیر الاضلاع ہے۔

	
convex polygon	concave polygon

The calculation of interior and exterior angles of a polygon applies to all polygons. To calculate the sum of interior angles, the polygon must first be divided into triangles. The sum of angles of a triangle are 180º, the number of triangles formed within a polygon are multiplied by 180º. Students know the difference between regular and irregular polygons, explain to them that the interior angles of regular polygons are all equal. To find the sum of interior angles, the following formula is used: $(n - 2) \times 180^\circ$, where n is the number of sides of a polygon. Subsequently, to find one interior angle, the sum of interior angles is divided by the number of sides of the polygon. For example, in the polygon, one angle is unknown. So, to find that angle, the sum of interior angles is first calculated.

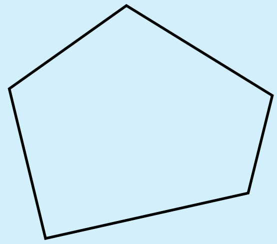
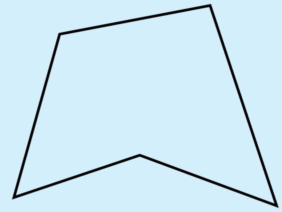
The figure is a pentagon since it has 5 sides. So, n is 5.
Sum of interior angles of a pentagon = $(n - 2) \times 180^\circ = (5 - 2) \times 180^\circ = 540^\circ$

$2a^\circ + 133^\circ + 48^\circ + 142^\circ + 93^\circ = 540^\circ$
$2a^\circ = 540^\circ - 133^\circ - 48^\circ - 142^\circ - 93^\circ$
$= 124^\circ$
$a^\circ = 62^\circ$



Next, the sum of exterior angle of a polygon is 360º. To determine one exterior angle, the sum of exterior angle is divided by the number of sides of the polygon.

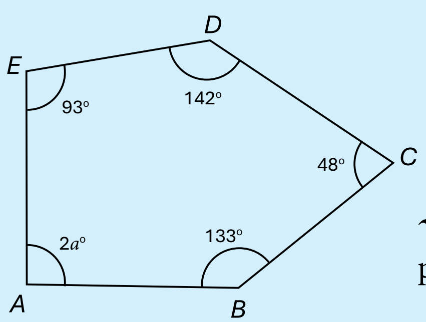
Move onto explaining to the student how to calculate the unknown angles in a triangle. Begin with explaining to them the properties of a triangle. Triangle is a polygon with three sides. The interior angles which are inside of the triangle and exterior angles which are obtained by extending each side of the triangle.

	
محدب (convex) کثیرالاضلاع	مقعر (concave) کثیرالاضلاع

کثیرالاضلاع (Polygon) کے اندرونی اور بیرونی زاویوں کا حساب تمام کثیرالاضلاع پر لاگو ہوتا ہے۔ اندرونی زایوں کے مجموعے کا حساب لگانے کے لیے polygon کو پہلے مثلثوں (triangles) میں تقسیم کرنا ضروری ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ مثلث (triangle) کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے لہٰذا ایک کثیرالاضلاع کے اندر بننے والے مثلثوں (triangles) کی تعداد کو 180° سے ضرب دی جاتی ہے۔ طلبہ regular اور irregular polygon کا فرق بہ خوبی جانتے ہیں۔ انھیں سمجھائیے کہ regular polygon کے اندرونی زاویے برابر ہوتے ہیں۔ ضرب کسی کثیرالاضلاع کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ (sum) معلوم کرنے کے لیے یہ فارمولا استعمال کیا جاتا ہے: $(n - 2) \times 180°$ جہاں 'n' polygon کے اطراف یا کناروں (sides) کی تعداد ہے۔ اس کے بعد ایک اندرونی زاویہ معلوم کرنا ہو تو اندرونی زاویوں کے مجموعے (sum) کو polygon کے اطراف (sides) کی تعداد سے تقسیم کر دیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر کسی کثیرالاضلاع (polygon) ہی ایک زاویہ معلوم ہو تو سب سے پہلے اندرونی زاویوں کا مجموعہ معلوم کیا جاتا ہے تاکہ نامعلوم زاویے کا پتہ بہ آسانی لگایا جاسکے۔

یہ ایک pentagon شکل ہے کیونکہ اس کے پانچ اطراف (sides) ہیں۔ اس لیے n ہے 5

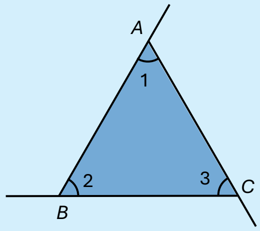
pentagon کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ $= (n - 2) \times 180° = (5 - 2) \times 180° = 540°$



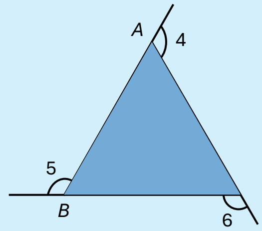
$$2a° + 133° + 48° + 142° + 93° = 540°$$
$$2a° = 540° - 133° - 48° - 142° - 93°$$
$$= 124°$$
$$a° = 62°$$

اس کے بعد طلبہ کو سمجھائیے کہ polygon کے بیرونی زاویوں (exterior angles) کا مجموعہ (sum) 360° ہوتا ہے لہٰذا ایک بیرونی زاویہ معلوم کرنا ہو تو بیرونی زاویوں کے مجموعے کو polygon کے اطراف یا کناروں (sides) کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

اب سبق کو آگے بڑھاتے ہوئے طلبہ کو ایک مثلث triangle میں نامعلوم زاویوں کا حساب لگانا بتائیے۔ پہلے آپ انھیں مثلث triangle کی خصوصیات وضاحت سے بتائیے کہ مثلث ایک تین کناروں یا اطراف والا کثیرالاضلاع (polygon) ہے جس کے اندرونی زاویے (interior angles) مثلث کے اندر بنتے ہیں اور بیرونی زاویے (exterior angles) اس کے ہر sides کو بڑھا حاصل کیے جاتے ہیں۔

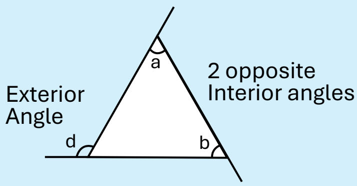


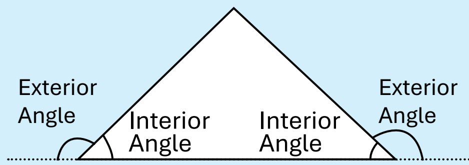
Interior angles: ∠1, ∠2, and ∠3



exterior angles: ∠4, ∠5, and ∠6

The sum of interior angles of a triangle equals to 180°. The adjecent interior and exterior angles of a triangle angles are supplementary; thus, their sum is 180°. An exterior angle of a triangle, however, is equal to the sum of the two opposite interior angles.





The sum of angles in a triangle is 180º, that is $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$. For example, in ΔABC, $m\angle A = 30°$ and $m\angle B = 45°$, m∠C will be calculated as:

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

$30° + 45° + m\angle C = 180°$

$75° + m\angle C = 180°$

$m\angle C = 180° - 75°$

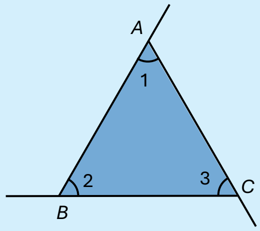
$m\angle C = 105°$

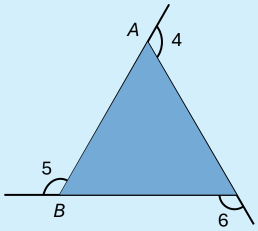
Students often tend to think that all sides of a triangle are equal. This concept is wrong as there are three sides of the triangles based on the length of their sides; equilateral (all sides and angles are equal), isosceles (two sides and angles are equal) and scalene (no side or angles are equal).

Competency 2:

- Recognise quadrilaterals and their characteristics (parallel sides, equal sides, equal angles, right angles, and line of symmetry)

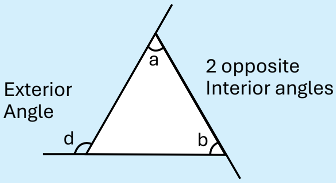
Stimulus: This competency requires students to revisit the previous competency. Recall with students that polygons are closed figures with straight lines. Polygons with four straight sides are called quadrilaterals. There are different kinds of quadrilaterals. Rectangles, squares, rhombus, trapezium and kite are all quadrilaterals. Explain to the students that they will be learning the properties of each quadrilateral. Using the following cheat sheet, explain each property of quadrilaterals.

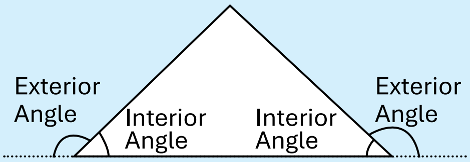




Interior angles: ∠1, ∠2, and ∠3 — exterior angles: ∠4, ∠5, and ∠6

مثلث کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔مثلث کے ملحقہ اندرونی اور بیرونی زاویے تکمیلی زاویے (supplementory angles) ہوتے ہیں۔ لہٰذا ان کا مجموعہ بھی 180° ہوتا ہے۔ تاہم مثلث (triangle) کا ایک بیرونی زاویہ اس کے مخالف دو اندرونی زاویوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔





مثلث کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔یعنی $m\angle C + m\angle B + m\angle A$ مثال کے طور پر اگر ΔABC میں $m\angle A = 30^\circ$ اور $m\angle B = 45^\circ$ تو پھر $m\angle C$ کا حساب اس طرح کیا جائے گا:

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

$30^\circ + 45^\circ + m\angle C = 180^\circ$

$75^\circ + m\angle C = 180^\circ$

$m\angle C = 180^\circ - 75^\circ$

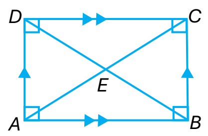
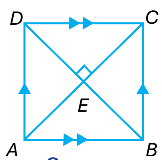
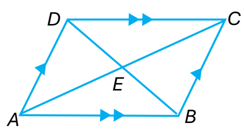
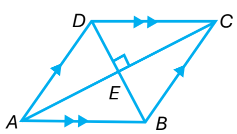
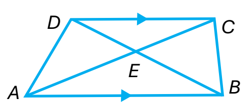
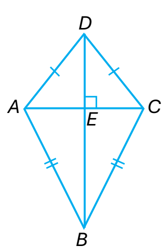
$m\angle C = 105^\circ$

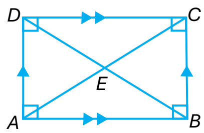
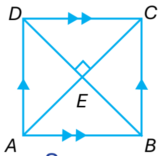
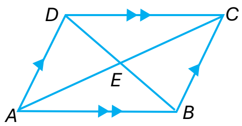
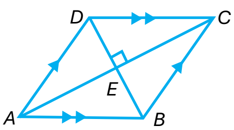
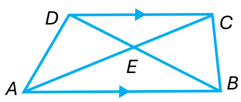
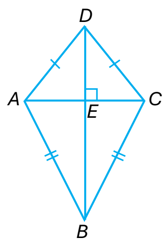
اکثر طلبہ کا خیال ہے کہ مثلث کی (sides) برابر ہوتی ہیں یہ تصور غلط ہے کیونکہ مثلث کے تین اطراف (sides) ان کے اطراف کی لمبائی کی بنیاد پر تین طرح کے ہیں۔مساوی الاضلاع مثلث (Equilateral) جس کے تمام اطراف اور زاویے برابر ہوتے ہیں۔ دو مساوی الاضلاع مثلث (isoscales) جن کے دو اطراف اور دو زاویے برابر ہوتے ہیں۔ غیر مساوی الاضلاع مثلث (scalene) جن میں کوئی بھی اطراف یا زاویہ برابر نہیں ہوتا۔

قابلیت ۲

- چار ضلعی (quadrilaterals) اشکال اور ان کی خصوصیات (متوازی اطراف، مساوی اطراف، مساوی زاویہ، زاویہ قائمہ اور خط تشاکل (line of symmetry) کو پہچانیں۔

محرک : اس قابلیت کو سیکھنے کے لیے ضروری ہے کہ طلبہ اپنی پچھلی قابلیت پر نظر ثانی کریں لہٰذا طلبہ کو یاد دلائیے کہ کثیر الاضلاع (polygon) straight line والی بند اشکال ہیں ان کی چار اطراف straight ہوتی ہے اس لیے انھیں چار ضلعی (quadrilaterals) کہا جاتا ہے۔ چار ضلعی اشکال کی مختلف اقسام ہیں۔جن میں مستطیل (rectangles)، مربع (square)، مُعیّن (Rhombus)، ذوزنقہ (Trapezium) اور پتنگ (Kite) شامل ہیں۔طلبہ کو وضاحت سے بتائیے کہ وہ ہر چار ضلعی (quadrilaterals) اشکال کی خصوصیات کو سیکھیں گے۔ درج ذیل حوالہ جاتی جدول (cheat sheet) کو استعمال کرتے ہوئے ہر چار ضلعی (quadrilaterals) شکل کی خصوصیت کو وضاحت سے بیان کیجیے:

quadrilateral	Parallel sides	Equal sides	Interior sides	Diagonals
 Rectangle	There are two pairs of parallel sides.	Opposite sides are equal in length.	All four angles are right angles.	The two diagonals are equal in length. Diagonals bisect each other, i.e. $AE = EC$ and $BE = ED$.
 Square	There are two pairs of parallel sides.	All four sides are of the same length.	All four angles are right angles.	The diagonals are equal in length. Diagonals bisect each other at right angles, i.e. $A\hat{E}B = B\hat{E}C = A\hat{E}D = C\hat{E}D = 90^\circ$. Diagonals bisect the interior angles, e.g. $B\hat{A}C = C\hat{A}D = 45^\circ$ and $A\hat{B}D = C\hat{B}D = 45^\circ$.
 Parallelogram	There are two pairs of parallel sides.	Opposite sides are equal in length.	Opposite angles are equal, i.e. $A\hat{D}C = A\hat{B}C = B\hat{A}D = B\hat{C}D$.	Diagonals bisect each other, i.e. $AE = EC$ and $BE = ED$.
 Rhombus	There are two pairs of parallel sides.	All four sides are of the same length.	Opposite angles are equal, i.e. $A\hat{D}C = A\hat{B}C = B\hat{A}D = B\hat{C}D$.	The two diagonals are equal in length. Diagonals bisect each other, i.e. $AE = EC$ and $BE = ED$.
 Trapezium	There is at least one pair of parallel sides.			
 Kite	Opposite sides may be parallel.	There are two pairs of equal adjacent sides.		Diagonals cut each other at right angles, i.e. $A\hat{E}B = B\hat{E}C = A\hat{E}D = C\hat{E}D = 90^\circ$. Diagonals cut each other at right angles, i.e. $A\hat{D}B = C\hat{D}B = A\hat{B}D = C\hat{B}D$.

quadrilateral	Parallel sides	Equal sides	Interior sides	Diagonals
 Rectangle	There are two pairs of parallel sides.	Opposite sides are equal in length.	All four angles are right angles.	The two diagonals are equal in length. Diagonals bisect each other, i.e. $AE = EC$ and $BE = ED$.
 Square	There are two pairs of parallel sides.	All four sides are of the same length.	All four angles are right angles.	The diagonals are equal in length. Diagonals bisect each other at right angles, i.e. $A\hat{E}B = B\hat{E}C = A\hat{E}D = C\hat{E}D = 90°$. Diagonals bisect the interior angles, e.g. $B\hat{A}C = C\hat{A}D = 45°$ and $A\hat{B}D = C\hat{B}D = 45°$.
 Parallelogram	There are two pairs of parallel sides.	Opposite sides are equal in length.	Opposite angles are equal, i.e. $A\hat{D}C = A\hat{B}C = B\hat{A}D = B\hat{C}D$.	Diagonals bisect each other, i.e. $AE = EC$ and $BE = ED$.
 Rhombus	There are two pairs of parallel sides.	All four sides are of the same length.	Opposite angles are equal, i.e. $A\hat{D}C = A\hat{B}C = B\hat{A}D = B\hat{C}D$.	The two diagonals are equal in length. Diagonals bisect each other, i.e. $AE = EC$ and $BE = ED$.
 Trapezium	There is at least one pair of parallel sides.			
 Kite	Opposite sides may be parallel.	There are two pairs of equal adjacent sides.		Diagonals cut each other at right angles, i.e. $A\hat{E}B = B\hat{E}C = A\hat{E}D = C\hat{E}D = 90°$. Diagonals cut each other at right angles, i.e. $A\hat{D}B = C\hat{D}B = A\hat{B}D = C\hat{B}D$.

Point out to them that a quadrilateral is named by taking the vertices either in a clockwise or anticlockwise order. Hence, *ABCD*, *BCDA*, *CDAB* and *DABC* are correct ways of naming the quadrilateral, but *ABDC* and *CDBA* are not. Explain to the students that a diagonal forms a triangle, and if we are to draw a diagonal within the quadrilateral, we divide it into two triangles. The interior angle of one triangle is 180°. Therefore, the total interior angle of the quadrilateral is 180° + 180° = 360°. Use the textbook to help students find unknown angles of a quadrilateral.

Competency 3:

- Describe the properties of a circle: center, radius, diameter, chord, arc (major and minor), semi-circle and segment of a circle.

Stimulus: This competency requires students to identify different parts of a circle and differentiate between them. Start the lesson by asking the students to identify different circular objects in the classroom or in everyday life. Next, ask them what a circle is. Draw a circle on the board and mark a centre right in the middle of the circle. This point is the centre of the circle. The constant distance between the centre of the circle and any point of the circle is called the radius. Move on to explaining the different parts of the circle using the text from the textbook. You may use a cut-out circle and a thread to physically demonstrate the different parts of the circle. Furthermore, point out that arcs are not always half a circle. Differentiate between major and minor arc. Move on to completing the exercise from the book to help the students gain strength in this competency.

اس بات کی نشان دہی کیجیے کہ quadrilaterals کو نام دیتے ہوئے ان کے vertices کے گھڑی وار (clockwise) یا مخالف گھڑی وار (anticlockwise) ہونے کی ترتیب کو مدنظر رکھا گیا ہے۔ لہٰذا *ABCD, BCDA, CDAB* اور *DABC* چارضلعی اشکال کو نام دینے کے یہ طریقے درست ہیں لیکن *ABDC* اور *CDBA* غلط ہیں۔ طلبہ کو واضح طور پر سمجھایئے کہ ایک وتر (diagonal) ایک مثلث (triangle) کو تشکیل دیتا ہے اور اگر ہم quadrilaterals کے اندر ایک وتر (diagonal) کھینچتے ہیں تو ہم اسے دو مثلثوں میں تقسیم کر دیتے ہیں۔ چونکہ ہر مثلث کا اندرونی زاویہ 180° ہے۔ لہٰذا quadrilateral کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ ہوگا: 180° + 180° = 360° اب درسی کتاب کی مدد سے طلبہ کو quadrilaterals کے نامعلوم زاویوں کو تلاش کروایئے۔

قابلیت ۳

- دائرے (circle) کی خصوصیات بیان کرسکیں : مرکز (Centre)، نصف قطر (Radius)، قطر (Diameters)، وتر (Chard)، قوس (Arc)، بڑی (major) اور چھوٹی (minor)، نیم دائرہ (semi circle) اور دائرے کا قطعہ segment of a circle۔

محرک : یہ قابلیت اس بات کا تقاضا کرتی ہے کہ طلبہ دائرے کے مختلف حصّوں کو پہچان سکیں اور ان کے درمیان موجود فرق کو جان سکیں۔ سبق کا آغاز اس طرح کریں کہ طلبہ سے کہیں کہ وہ روزمرّہ زندگی سے اور اپنی جماعت میں موجود گول چیزوں کو شناخت کریں۔ پھر طلبہ سے پوچھیے کہ دائرہ کسے کہتے ہیں؟ اور بورڈ پر ایک دائرہ بنایئے۔ اس کے عین وسط میں ایک نقطہ لگایئے یہ دائرے کا مرکز (centre) ہے۔ مرکز سے دائرے تک کا مستقل فاصلہ نصف قطر (radius) کہلاتا ہے۔ اب درسی کتاب کے متن کی مدد سے دائرے کے مختلف حصّوں کو بیان کیجیے اور اس کا عملی مظاہرہ کرنے کے لیے آپ دائرے کا cutout اور ایک دھاگہ استعمال کیجیے۔ مزید برآں نشان دہی کیجیے کہ Arc ہمیشہ آدھا دائرہ نہیں ہوتا، major اور minor کے درمیان فرق سمجھایئے۔ درسی کتاب میں دی گئی مشقوں کو کرنے سے طلبہ کو اس قابلیت پر عبور حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔

Unit 9 Practical Geometry

Bilingual Concept Builder Notes

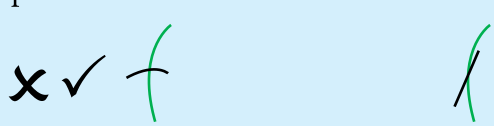
Competency 1

- Construct different types of triangles (equilateral, isosceles, scalene, acute-angled, right-angled, and obtuse-angled.

Stimulus: This competency would require students to use their knowledge of properties of various 2D shapes and apply it practically. From the previous competencies, students are aware that a triangle is a three-sided polygon. Begin the lesson by explaining students the different properties of triangles. Explain to the students that triangles are closed figures with three sides and vertices. A triangle has six components that determine its type. Triangles are named according to the sides and angles of the triangles.

Triangles that have three qual sides are equilateral triangles, triangles that have two equal sides are isosceles and triangles that have no equal sides are scalene. Similarly, triangles that have three angles less than 90° are acute angled triangles. Triangles with one angle more than 90° are obtuse angles triangles and triangles that has one angle exactly 90° are right-angled triangles. Point out to the students that a triangle can be uniquely determined and, in our case, constructed the components are known. Once the students have understood the types of triangles, move on to helping them construct figures more easily. Construction requires certain tools to be used. The correct use of these tools results in precise construction of angles and bisectors. Demonstrate the tools, pencil, ruler, protractor, and compass, in the classroom.

Emphasise the proper use of ruler, protractor, and compass. Tell the students to use a ruler that is not chipped from any side. Remind them to align the ruler properly when constructing, so it doesn't slip. When using the pencil, have the students sharpen it freshly so it is pointed and makes a thin line. Ask the students to draw light lines in case they need to be corrected. The correct use of protractors is also necessary during construction of angles and bisectors. If the protractor is not aligned with the starting point of construction, it may result in an angle that is either larger or smaller than the required angle. Students also tend to misread the protractor and construct incorrect angles (and read them from the opposite side, for example, make obtuse angles instead of acute angles), therefore, accurate measurement should be highly emphasised on. Similarly, the compass width is to be kept constant, so the radius of the arc does not change and results in an incorrect bisector. Point out to the students that when making an intersection with a line or an arc, they should ensure the angle of intersection is as close to 90° as possible.



عملی جیومیٹری

باب
9

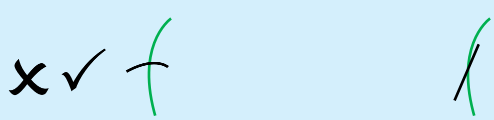
قابلیت ا

- مختلف اقسام کے مثلث (triangles) جیسے متساوی الاضلاع مثلث (equilateral)، مساوی الساقین مثلث (isosceles)، مختلف الاضلاع مثلث (scalene)، حادی زاویہ مثلث (acute-angled triangle)، قائم زاویہ مثلث (right-angled triangle) اور منفرجہ زاویہ مثلث (obtuse-angled triangle) کو بنا سکیں۔

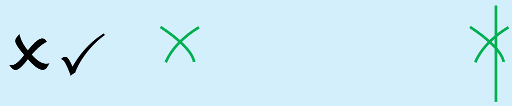
محرک : اس قابلیت کے حصول کے لیے ضروری ہے کہ طلبہ 2 ڈی اشکال (2D Shapes) کے حوالے سے اپنی گزشتہ معلومات کو بروئے کار لائیں اور اسے عملی طور پر لاگو کریں۔ گزشتہ قابلیتوں میں طلبہ نے جانا کہ مثلث (triangle) ایک تین ضلعی کثیر الاضلاع ہے۔ سبق کا آغاز تکون کی مختلف خصوصیات کی وضاحت کی کرتے ہوئے کیجیے۔ طلبہ کو بتائیے کہ مثلث ایک ایسی بند شکل (closed figures) ہے جس کے تین اضلاع اور تین کونے (vertices) ہیں۔ ایک مثلث کے 6 اجزا elements ہوتے ہیں جو اس کی قسم کا تعین کرتے ہیں۔ مثلثوں کے نام ان کے اضلاع اور زاویوں کی بنیاد پر رکھے گئے ہیں۔

وہ مثلث جن کے تین اضلاع برابر ہوتے ہیں وہ مساوی الاضلاع مثلث (equilateral) ہیں جن مثلث کے دو اضلاع برابر ہوتے ہیں وہ مساوی الساقین مثلث (isosceles) کہلاتے ہیں اور جن مثلثوں میں تینوں اضلاع مختلف ہوتے ہیں انھیں مختلف الاضلاع مثلث (scalene) کہتے ہیں۔ اسی طرح جن مثلثوں کے تینوں زاویے 90° سے کم ہوں وہ acute angled triangles کہلاتے ہیں۔ جن مثلثوں میں ایک زاویہ 90° درجے سے زیادہ ہوتا ہے وہ obtuse-angled مثلثیں ہیں۔ اور وہ جن میں ایک زاویہ عین 90° درجے کا ہوتا ہے انھیں قائمہ الزاویہ مثلث (right angled triangle) کہا جاتا ہے۔ یہاں یہ بات بھی واضح طور پر طلبہ کو بتائیے کہ ایک مثلث کا تعین انفرادی طور کیا جاسکتا ہے اور خصوصاً اس صورت میں جب اس کی ساخت کے اجزا معلوم ہوں تو اس مثلث کو بہ آسانی بنایا جاسکتا ہے۔ ایک بار طلبہ triangles کی اقسام کو اچھی طرح سمجھ لیں تب انھیں شکلیں (figures) بنانے میں مدد دیجیے تا کہ طلبہ بہ آسانی اسے کرسکیں۔ اشکال کی تشکیل کے لیے مخصوص اوزاروں (tools) کی ضرورت پڑتی ہے۔ مختلف قسم کے زاویوں اور وسطانی خطوط (bisectors) کی درست تشکیل کے لیے tools کا درست استعمال کرنا بھی بے حد اہم ہے لہٰذا طلبہ کو ان tools، پنسل، ruler، پروٹیکٹر اور پرکار (compass) کے استعمال کا عملی مظاہرہ کرکے دکھایئے۔

طلبہ کو ruler، پروٹیکٹر اور پرکار (compass) کے درست استعمال کرنے پر زور دیجیے۔ ہدایت کیجیے کہ وہ ایسا ruler استعمال نہ کریں جس کے کنارے ٹوٹے ہوئے یا خراب ہوں اور لائن کھینچتے ہوئے ruler کو قابو میں رکھیں۔ پنسل کی نوک کو اچھی طرح تراشیں تا کہ ایک واضح اور باریک لائن کو کھینچ سکیں۔ ہلکی لکیر بنایئے تا کہ غلطی ہوجانے پر بہ آسانی مٹا کر درست کرسکیں۔ زاویوں اور وسطانی خطوط (bisectors) کی تشکیل کے دوران پروٹیکٹر کو درست طریقے سے استعمال کیجیے اگر پروٹیکٹر تشکیل کے نقطۂ آغاز پر درست طریقے سے نہ رکھا جائے تو زاویہ، مطلوبہ زاویے سے بڑا یا چھوٹا بن سکتا ہے۔ طلبہ بھی پروٹیکٹر کو پڑھنے میں غلطی کرتے ہیں اور غلط زاویہ بناتے ہیں جیسے کہ زاویے کو مخالف سمت سے پڑھنا مثال کے طور پر acute زاویے کی بجائے obtus زاویہ بنالینا اس لیے درست پیمائش پر زیادہ زور دینا چاہیے۔ اسی طرح پرکار پر اپنی گرفت کو مستقل رکھنا تا کہ arc کا radius تبدیل نہ ہو اور وسطانی خط (bisector) غلط نہ بنے۔ طلبہ کو یہ بات بھی واضح طور پر بتائیے کہ جب کسی لکیر یا قوس کے ساتھ تقاطع (intersection) بنارہے ہوں تو اس بات کو یقینی بنائیں کہ تقاطع (intersection) کا زاویہ جتنا ممکن ہوسکے۔ 90° درجے کے قریب ہو۔



Furthermore, ask them to carefully draw a line through a point to ensure accuracy.



All construction lines must be shown clearly, and none of them should be erased. Using all steps from the textbook as they are, go through construction with the students step-by-step. This chapter requires a lot of practice to gain mastery, therefore, help the students carry out questions from the exercises and independent worksheets as guided and independent practice.

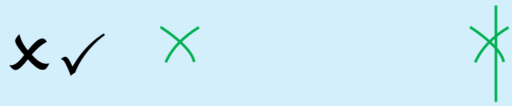
Competency 2:

- Recognise, identify, and draw lines of symmetry in 2D shapes and rotate objects using rotational symmetry.
- Find the order of rotational symmetry.

Stimulus: Begin the lesson by recalling with the students what rotation is. It is the process of turning an object around a fixed point. One complete rotation is when an object is turned about at a fixed point by an angle of 360°. If a square is rotated at a fixed point, we get exactly the same shape after 90^{o}. However, in case of a rectangle, we get exactly the same shape after 180^{o}. Such figures or objects which can be rotated to get the same shape in less than one full circle are said to have rotational symmetry.

Next, cut a cardboard triangle. Place it on the board and put a thumb pin on one of its vertices to keep it in place. Next, rotate the triangle at an angle on 90^{o} clockwise. The position on the triangle changes. Do so three more times and the triangle will come back to its original position. It took 360^{o} to come back to its original position. We say that the angle of rotation for the triangle is 360^{o}. Explain to the students that the minimum angle through which the figure has to be rotated to get the original figure is called the angle of rotation. And the point about which the figure is rotated is known as the centre of rotation. Use cut-out of different figures and shapes to determine the angle of rotation with the students. Once the students can successfully determine the angle of rotation, use the skills to help them determine the order of rotational symmetry. The order of rotational symmetry is the number that tells us how many times an object or figure looks exactly the same while it is rotated by 360^{o}. That is, if the angle of rotation is x^{o}, then the order of rotation is $\frac{360^{o}}{x^{o}}$. Use the previous example of a rectangle to determine its order of rotation. Since it takes 180^{o} for a rectangle to come back to the same shape, the order of rotational symmetry will be $\frac{360}{180} = 2$. Point out to the students that no object has 0 order of rotational symmetry. Every figure or object has at least 1 order of rotational symmetry as it takes $360^{=}$ to come back to its original place after one complete rotation. Students may often think that any shape that looks the same when turned has rotational symmetry. Therefore, emphasise that the shape needs to make an entire 360° turn for it to have rotational symmetry. Use different examples of cut-outs to show students' rotational symmetry. The following table will help you.

مزید برآں ایسی لکیر (line) کی درستگی کو یقینی بنانے کے لیے جو کسی نقطے سے گزرتی ہو انھیں زیادہ محتاط رہنے کی ضرورت ہے۔



بنائی جانے والی تمام لائنیں واضح طور پر دکھائی دینی چاہییں اور ان میں سے کسی کو بھی نہیں مٹانا چاہیے۔ درسی کتاب میں دیے گئے تمام مراحل کو اسی ترتیب میں استعمال کرتے ہوئے طلبہ کے ساتھ تشکیل کے عمل کو مکمل کیجیے۔ اس باب میں مہارت حاصل کرنے کے لیے بہت زیادہ مشق کرنے کی ضرورت ہے لہٰذا طلبہ کو دی گئی ہدایات کے مطابق مشقی سوالات اور اضافی مشقیں اور ورک شیٹ پر کام کروایئے۔

قابلیت ۲

- دو جہتی اشکال (2D Shapes) میں خط تشاکل (Line of symmetry) کو پہچانیں اور کھینچیں اور اشیا کو (rotational symmetry) کا استعمال کرتے ہوئے اشیا کو گھما سکیں۔
- rotational symmetry کی ترتیب معلوم کرسکیں۔

محرک: سبق کا آغاز طلبہ کو یہ یاد دلاتے ہوئے کیجیے کہ گردش سے کیا مراد ہے؟ کسی شے کو ایک مقررہ نقطے (fixed point) کے گرد گھمانے کا عمل گردش ہے۔ جب کوئی چیز 360° کے زاویے سے ایک مقررہ نقطے پر گھمائی جاتی ہے تو اسے ایک مکمل گردش کہتے ہیں۔ اگر ایک مربع شکل کو ایک نقطے کے گرد گھمایا جائے تو ہمیں 90° کے بعد بالکل وہی شکل ملتی ہے تاہم مستطیل کی شکل میں ہمیں بالکل وہی شکل 180° کے بعد ملتی ہے۔ ایسی اشیا جنھیں ایک مکمل دائرہ مکمل کیے بغیر گھما کر وہی شکل حاصل کی جاسکے وہ rotational symmetry رکھتی ہیں۔

اس کے بعد ایک گتّے کا مثلث کاٹیں اور اسے بورڈ پر رکھ کر اس کے کسی ایک کونے پر پن لگادیں تاکہ اسے گھماتے وقت وہ اپنی جگہ پر قائم رہے اب اس گتّے کے مثلث کو گھڑی وار (clockwise) سمت میں 90° درجے کے زاویے پر گھمائیں۔مثلث کی پوزیشن بدل جائے گی یہی عمل آپ تین بار دہرائیں گے تو مثلث واپس اپنی اصل جگہ پر آجائے گا۔ اسے اپنی اصل پوزیشن پر آنے میں 360° درجے لگے۔ لہٰذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ مثلث کا گردشی زاویہ 360° درجے ہے طلبہ کو سمجھایئے کہ وہ کم سے کم زاویہ جس کے ذریعے کسی شکل کو گھما کر اسے اصل شکل میں لایا جاسکے۔ اس کا ’زاویہ گردش‘ کہتے ہیں۔ اور وہ نقطہ جس پر شکل کو گھمایا جاتا ہے وہ مرکز گردش کہلاتا ہے۔ اب مختلف اشکال والے cutouts کو استعمال کرتے ہوئے طلبہ کے ساتھ مل کر ان کے زاویۂ گردش معلوم کیجیے۔ جب طلبہ زاویۂ گردش کا تعین کرلیں تو ان کی اس صلاحیت کو بروئے کار لاتے ہوئے انھیں rotational symmetry کی ترتیب کو معلوم کرنے میں ان کی مدد کریں۔ rotational symmetry یہ بتاتی ہے کہ کوئی شکل یا چیز 360° درجے مکمل کرنے کے دوران کتنی بار اپنی اصل شکل میں دکھائی دی۔یعنی اگر زاویۂ گردش ہے x^{o} ہے تب order of rotation $\frac{360^{o}}{x^{o}}$ اس ہے اس کی گردش کی ترتیب کا تعین کرنے کے لیے ہم مستطیل (rectangle) کی گزشتہ مثال کا استعمال کریں گے۔ چونکہ مستطیل 180° پر واپس اپنی اصل شکل میں آجاتا ہے لہٰذا اس کی rotational symmetry کی ترتیب ہو گی $2 = \frac{360}{180}$ یہاں طلبہ کو یہ بات سمجھایئے کہ کسی بھی چیز کا order of rotational symmetry صفر ’0‘ نہیں ہوتا۔ ہر شکل کی کم از کم گردشی ترتیب 1 ضرور ہوتی ہے۔ کیونکہ 360° کی گردش مکمل کرنے کے بعد وہ اپنی اصل جگہ یا حالت میں لوٹ آتی ہے۔ اکثر طلبہ یہ سمجھتے ہیں کہ کوئی شکل جو گھمانے پر ایک جیسی دکھائی دے اس میں rotational symmetry ہوتی ہے لہٰذا اس بات پر زور دیجیے کہ کسی بھی شکل میں rotational symmetry اس وقت ہوتی ہے جب وہ مکمل طور پر 360° کا چکر لگا کر اپنی اصل حالت میں لوٹ آئے۔طلبہ کو گردشی ہم آہنگی rotational symmetry دکھانے کے لیے مختلف قسم کے cutouts کو بطور مثال استعمال کیجیے۔مندرجہ ذیل جدول آپ کو عملی کام کروانے میں مدد فراہم کرے گا۔

Cut-out of shape	Order of Rotational Symmetry
Square	4
Equilateral triangle	3
Irregular polygon	1
Hexagon	6

Competency 3:

- Translate an object and give precise description of transformation.

Stimulus: In primary grades, students were taught to move, slide and rotate an object without using a grid. Here, they will learn how to slide or move an object using correct calculations. Begin the lesson by describing to the students what translation is. Explain to them that translation is the movement or shifting of a figure from one place to another straight line without changing its shape, size or orientation. This is done by moving the vertices of the figure to the prescribed number of spaces on a coordinate plane and then drawing the new figure. The shape stays the same size and does not turn. Translation of a shape is a transformation whereby a shape moves towards right or left, and up or down. To translate a shape we move each of its vertex under the given translation. If a point (x, y) moves 'a' units right, we add a to x and if it moves left we subtract a from x. Similarly, if the point moves 'b' units up, we add b to y and if it moves down, we subtract b from y. Using the examples in the textbook, explain to the students how one figure can be translated.

Cut-out of shape	Order of Rotational Symmetry
Square	4
Equilateral triangle	3
Irregular polygon	1
Hexagon	6

قابلیت ۳

- کسی object کو منتقل (translate) کریں اور اس کی منتقلی کو (مختصراً) وضاحت کے ساتھ بیان کرسکیں۔

محرک: ابتدائی یا پرائمری جماعتوں میں طلبہ نے grid استعمال کیے بغیر کسی چیز کو حرکت دینا، پھسلانا (slide) اور گھمانا (rotate) سیکھا تھا اس جماعت میں وہ سیکھیں گے کہ کس طرح درست calculation کرکے کسی شکل کو کیسے پھسلایا (slide) اور منتقل کیا جاتا ہے۔ سبق کا آغاز کرتے ہوئے طلبہ سے سوال کیجیے کہ ان کے خیال میں منتقلی Translation کیا ہے؟ اب اس بات کی وضاحت کیجیے کہ منتقلی دراصل تبدیلی ایک ایسا عمل ہے جس میں کسی شکل یا تصویر کو اس کی جسامت، شکل یا رخ کو تبدیل کیے بغیر ایک سیدھی سمت میں ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کیا جاتا ہے۔ یہ عمل اس وقت مکمل ہوتا ہے جب کسی شکل (figure) کے کونوں (vertices) کو مخصوص تعداد میں خانوں (spaces) کے مطابق coordinate plane پر منتقل کیا جائے اور پھر نئی شکل (figure) کو بنایا جائے اس عمل میں شکل کا ایک سائز ایک ہی رہتا ہے اور وہ turn بھی نہیں ہوتی۔ کسی شکل کی ٹرانسلیشن ایک ایسی ٹرانسفارمیشن ہے جس کے تحت ایک شکل دائیں یا بائیں اور اوپر یا نیچے کی طرف حرکت کرتی ہے۔ کسی شکل کی ٹرانسلیشن کرنے کے لیے ہم اس کے ہر vertex کو دیے گئے ٹرانسلیشن کے نیچے منتقل کرتے ہیں اگر کوئی نقطہ point (x,y) اور وہ 'a' یونٹ دائیں جائے تو ہم x میں a کو add کرتے ہیں اگر یہ بائیں جائے تو ہم x میں سے a کو منہا کرتے ہیں۔ اسی طرح اگر کوئی نقطہ 'b' یونٹ اوپر جائے تو ہم y میں b کو جمع (add) کرتے ہیں اگر یہ نیچے جائے تو ہم y میں سے b کو منہا کرتے ہیں۔ کتاب میں دی گئی مثالوں کو استعمال کرتے ہوئے طلبہ کو سمجھائیے کہ کسی شکل (figure) کو Translate کیسے کیا جاتا ہے۔

Unit 10

Measurement

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Convert between standard units of distance and area
- Convert 12-hour clock to 24-hour clock and vice versa
- Convert between different units of time and speed
- Differentiate between uniform speed and average speed
- Calculate arrival time, departure time, and journey time in each situation

Stimulus: The outcome of this competency depends on the students' ability to use their arithmetic skills to convert between different units. Students have prior knowledge of conversion of units of distance and time from primary classes. However, here they will convert between units that are squared and cubed. Begin the lesson by introducing the SI units as the international system of units that have dedicated a particular unit to quantities. The SI units are essential to ensure consistency and accuracy in measurement throughout the world. For example, the SI unit of length is m, the SI unit of mass is kilogram, and the SI unit of time is second. There are other SI units too, but these three are the most common ones that students will deal with at this grade level. Since the units of the area are squared, the students will learn the conversion of squared units.

Explain to the students that when converting from a bigger unit to a smaller unit, we multiply and when converting from a bigger unit to a smaller unit, we divide. Inform them that $1m^2 = 10000\ cm^2$ because when converting m^2 to cm^2, the following is done:

$1\ m \times 1\ m = 1m^2$
But, $1\ m = 100\ cm$
$1m^2 = 100 \times 100\ cm^2$
$1m^2 = 10000\ cm^2$

Similarly, when converting cm^2 to m^2, the quantity in cm^2 is divided by $10000\ cm^2$. Or another method of converting cm^2 to m^2 as follows:

$1\ m = 100\ cm$
so, $1\ cm = \frac{1}{100}\ m$
$1\ cm = 0.01\ m$
$1\ cm^2 = 0.01 \times 0.01\ m^2$
$1\ cm^{2=}\ 0.0001\ m^2$

پیمائش

قابلیت ا

- فاصلے اور رقبے (area) کی معیاری اکائیوں کو آپس میں تبدیل (convert) کرسکیں۔
- 12 گھنٹے والی گھڑی کو 24 گھنٹوں والی گھڑی میں اور اس کے برعکس وقت کو تبدیل کرسکیں۔
- وقت اور رفتار کی مختلف اکائیوں کو آپس میں تبدیل کرسکیں۔
- یکساں رفتار اور اوسط رفتار میں فرق کرسکیں۔
- آمد کا وقت، روانگی کا وقت اور سفر کے اوقات کا دی گئی situation کے مطابق حساب کتاب لگا سکیں۔

محرک: اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کی مختلف پیمائشی اکائیوں کو ایک دوسرے میں تبدیل کرنے کی ریاضی کی مہارتوں کو استعمال کرنے کی صلاحیت پر منحصر ہے طلبہ ابتدائی جماعتوں سے فاصلے اور وقت کی اکائیوں کی تبدیلی کا علم رکھتے ہیں تاہم وہ یہاں پر مربع (squared) اور مکعب (cubed) کی اکائیوں میں تبدیلی کو سیکھیں گے۔ سبق کا آغاز (S1 Units) کو اکائیوں کے بین الاقوامی نظام کے طور پر متعارف کرواتے ہوئے کیجیے جس میں ہر مقدار کے لیے مخصوص اکائی مقرر کی گئی ہے (S1 Units) کا استعمال دنیا بھر میں پیمائش میں یکسانیت اور درستی کو یقینی بنانے کے لیے اشد ضروری ہے۔ مثال کے طور پر لمبائی کی S1 اکائی میٹر (m) ہے، کمیت کی S1 اکائی کلوگرام (kg) ہے اور وقت کی S1 اکائی سیکنڈ ہے۔ دیگر S1 اکائیاں بھی موجود ہیں لیکن یہ تین سب سے عام ہیں جن سے طلبہ کا اس جماعت میں سابقہ پڑے گا۔ کیونکہ رقبے کی اکائیاں مربع (squared) ہیں لہٰذا طلبہ مربع اکائیوں (units) کو تبدیلی کرنا سیکھیں گے۔

طلبہ کو وضاحت سے یہ بات سمجھایئے کہ جب کسی بڑی S1 کو چھوٹی اکائی میں تبدیل کرنا ہو تو ہم ضرب کرتے ہیں اور جب چھوٹی اکائی کو بڑی اکائی میں تبدیل کرنا ہو تو ہم تقسیم کرتے ہیں۔ انھیں یہ بھی بتایئے کہ $1m^2 = 10000\ cm^2$ کیونکہ جب m^2 کو cm^2 میں تبدیل کرنا ہو تو درج ذیل طریقہ اپنایا جاتا ہے:

$1\ m \times 1\ m = 1m^2$
But, $1\ m = 100\ cm$
$1m^2 = 100 \times 100\ cm^2$
$1m^2 = 10000\ cm^2$

اسی طرح جب cm^2 کو m^2 میں تبدیل کرنا ہو تو cm^2 میں موجود مقدار کو $10000\ cm^2$ سے تقسیم کرتے ہیں یا cm^2 کو m^2 میں تبدیل کرنے کا ایک اور طریقہ بھی ہے جو مندرجہ ذیل ہے۔

$1\ m = 100\ cm$
so, $1\ cm = \frac{1}{100}\ m$
$1\ cm = 0.01\ m$
$1\ cm^2 = 0.01 \times 0.01\ m^2$
$1\ cm^2 = 0.0001\ m^2$

Therefore, any quantity when converted from cm^2 to m^2, can also be multiplied by 0.0001 cm^2. Similarly, when calculating volume, the measurements are cubed. For example, when cm^3 is converted to mm^3, the quantities are first cubed and then calculated.

1 cm × 1 cm × 1 cm = 1 cm^3
But, 1 cm = 10 mm
1 cm^3 = 10 × 10 × 10 mm^3
1 $cm^{3\,=}$ 1000 cm^3

Similarly, 1 m^3 = 1000000 cm^3 and 1 cm^3 = 0.000001 m^3. Use different quantities to help students gain mastery in conversion of one unit to another unit. Students often make the mistake of first converting the units and the squaring or cubing it. Emphasize that the units first need to be squared or cubed before they are converted. Furthermore, they make the mistake of dividing when converting smaller to larger units and multiplying when converting larger to smaller units. Therefore, it is important to teach them to identify the direction of conversion or use conversion ladder to show arrows of down (×) and up (÷). Once the students are able to confidently convert units, move onto teaching them the conversion of time. Students have prior knowledge of how to read and convert units of time. This competency requires students to successfully convert time from 12-hour to 24-hour and vice versa. The best way to do so is to add or subtract 12 from the hours. For example, to convert 3.15 pm into 24-hour time, 12 is added to 3.15. The time in 24-hour time is 15.15. Similarly, to convert 17.00 hours into 12-hour, 12 is subtracted and p.m. is added. So, the time is 5.00 p.m. When converting 12-hour and 24-hour times, point out to the students that 12 p.m. stays as it is while 12 a.m. becomes either 0.00. Move onto teaching the students how to solve problems of time duration. Like all other world problems, students need to look out for clues to determine whether they have to add or subtract time. When time is added, if the sum is greater or equal to 60, carry it over. For example, if the sum is 95 minutes, 60 mins from it are carried over to the hours and it becomes 1 hour and 35 mins. Similarly, during subtraction, 60 minutes/seconds can be borrowed from hours and minutes respectively. Use the examples and exercises from the textbook to help students solidify this concept.

Now that students are familiar with units of time and distance, they will now learn how distance and time are related. The distance travelled over a particular period of time is known as the speed of an object. Use the textbook to help the students understand the relationship between distance, time and speed.

لہٰذا کسی مقدار کو cm^2 سے m^2 میں تبدیل کرنے کے لیے اسے 0.0001 cm^2 سے ضرب بھی کیا جا سکتا ہے اس طرح جب حجم (volume) کا حساب لگایا جائے تو پیمائشوں کو cubed کیا جاتا ہے۔مثال کے طور پر جب cm^2 کو mm^3 میں تبدیل کرنا ہو تو پہلے مقداروں کی پیمائشوں کو cubed کیا جاتا ہے اور پھر حساب لگایا جاتا ہے۔

$1\ cm \times 1\ cm \times 1\ cm = 1\ cm^3$
But, $1\ cm = 10\ mm$
$1\ cm^3 = 10 \times 10 \times 10\ mm^3$
$1\ cm^3 = 1000\ cm^3$

اسی طرح $1\ m^3 = 1000000\ cm^3$ اور $1\ cm^3 = 0.000001\ m^3$ طلبہ کو ایک اکائی (unit) سے دوسری اکائی (unit) میں تبدیلی کی مہارت پر عبور حاصل کرنے کے لیے مختلف مقداروں کو استعمال کیجیے۔ زیادہ تر طلبہ یہ غلطی کرتے ہیں کہ وہ پہلے اکائی (unit) کو تبدیل کرتے ہیں اور پھر اسے اسکوائر یا کیوبڈ کرتے ہیں لہٰذا اس نکتے پر زور دیجیے کہ اکائیوں (units) کو تبدیل کرنے سے پہلے انھیں اسکوائر یا کیوبڈ (cubed) کیا جاتا ہے۔مزید برآں وہ چھوٹی اکائیوں کو بڑی اکائیوں میں تبدیل کرتے ہوئے تقسیم کرنے میں اور بڑی اکائیوں کو چھوٹی اکائیوں میں تبدیل کرتے ہوئے ضرب کرنے میں غلطی کرتے ہیں۔ اس لیے یہ ضروری ہے کہ انھیں تبدیلی کی سمت کو معلوم کرنا (identity) سکھایا جائے یا conversion ladder کا استعمال کیا جائے جس میں نیچے کی طرف تیر (×) اور اوپر کی طرف تیر (÷) دکھائے گئے ہوں۔ جب طلبہ اعتماد کے ساتھ پیمائشی اکائیوں کو آپس میں تبدیل کرنے لگیں تو انھیں وقت کی تبدیلی کرنا سکھایئے۔طلبہ کو وقت پڑھنے اور اس کی اکائیوں کو تبدیل کرنے کا پہلے سے علم ہے۔ یہ قابلیت اس بات کی متقاضی ہے کہ طلبہ کامیابی کے ساتھ وقت کو 12 گھنٹے میں یا پھر اس کے برعکس وقت کو تبدیل کرسکیں۔ اس کا بہترین طریقہ یہ ہے کہ گھنٹوں میں 12 کو جمع یا تفریق کر دیا جائے۔مثال کے طور پر شام کے 3:15 PM کو 24 گھنٹے کے وقت میں تبدیل کرنے کے لیے 12 کو 3:15 میں جمع کر دیں تو 24 گھنٹے کا وقت 15:15 ہو گا اسی طرح 17:00 گھنٹوں کو 12 گھنٹوں میں تبدیل کرنے کے لیے 12 کو گھٹایا جاتا ہے اور p.m. کو شامل کیا جاتا ہے تو وقت ہو گا شام 5:00 PM۔ اس موقع پر طلبہ کو یہ نکتہ بھی سمجھایئے کہ دن کے 12 PM اسی طرح رہتا ہے جب کہ رات 12 AM بجے یہ 00.00 ہو جاتے ہیں۔

اب طلبہ کو وقت کی مدت والے عبارتی سوالات کو حل کروایئے۔ دیگر عبارتی سوالات کی طرح طلبہ کو یہاں یہ سمجھنے کی ضرورت ہے کہ آیا انھیں وقت کو گھٹانا ہے یا جمع کرنا۔ اگر وقت کو جمع کرنے پر مجموعہ یا کل 60 سے زیادہ ہو تو اسے اوپر کی طرف یعنی اگلی اکائی میں شامل کر دیں۔مثال کے طور پر اگر کل یا مجموعہ 95 منٹ ہو تو اس میں سے 60 منٹ کو گھنٹوں (hours) میں تبدیل کر کے باقی رہ جانے والے منٹ کو منٹوں کے طور پر رکھا جاتا ہے یعنی یہ 1 گھنٹہ اور 35 منٹ بن جاتے ہیں۔ اسی طرح تفریق کرتے ہوئے 60 منٹ یا سیکنڈ کو بالترتیب مستعار لیا جاسکتا ہے۔طلبہ کو اس تصور میں پختہ کرنے کے لیے انھیں درسی کتاب میں دی گئی مشقیں اور مثالیں زیادہ سے زیادہ کروایئے۔

چونکہ طلبہ وقت اور فاصلے کی اکائیوں سے واقف ہیں لہٰذا اب وہ سیکھیں گے کہ فاصلے اور وقت کا آپس میں کیا تعلق ہے۔ کسی خاص مدت (period) میں طے کیا گیا فاصلہ کسی چیز کی رفتار (speed) کہلاتا ہے۔طلبہ کو فاصلہ، وقت اور رفتار کے درمیان تعلق کو سمجھایئے اور اس کے لیے درسی کتاب کے مواد کا استعمال کیجیے۔

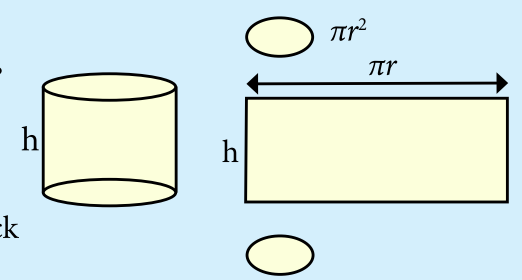
Competency 2:

- Calculate the area and perimeter of shaded and unshaded regions in composite shapes
- Find the circumference and area of a circle
- Calculate the surface area and volume of any 3D shape including right prims and cylinders

Stimulus: Students are familiar with basic 2D shapes, such as quadrilaterals and triangles and how to calculate their area and perimeter. Recall with the students that area is the space enclosed within the boundary of a shape, whereas the perimeter is the total length of the boundary. Start the lesson with drawing a circle on the board as best as you can. Now ask the students how they would find the area and perimeter of it. Once they answer, move onto explaining to the students the different parts of a circle, namely circumference, radius, and diameter. Circle is the total lenght of circle. Radius refers to the distance from the center of the circle to the circumference, whereas diameter is twice of a radius. One way of measuring the circumference of a circle is to place a length of thread along the circle. Take care to avoid overlapping the two ends of the thread. Straighten the thread and measure its length along the scale of a ruler. The length of the thread gives the circumference of the circle. For any circle, when the circumference is divided by the diameter, the answer is a number that approximates to 3.14 or $\frac{22}{7}$. This number is called 'pi' and is denoted by the symbol π.

To measure the perimeter of a circle, we use formula $C = 2\pi r$, where π is equal to $\frac{22}{7}$ or 3.142 and r is the radius. In case diameter, instead of a radius, is provided in a question, then the diameter is first divided by 2 to attain the radius of the circle. Similarly, the area of the circle is calculated by πr^2. Use the exercises questions as guided and independent practice for students before moving onto finding the area and perimeter of shaded and unshaded composite shapes. Explain to the students that composite figures are made up of two or more shapes. Since this topic is already explained in the previous class, use the textbook as support to help students determine the area and perimeter of shaded and unshaded regions.

Move onto explaining the students how to find the surface area and volume of prisms. The unit for surface area is m^2, whereas the unit for volume is m^3. Inform the students that prisms are 3D shapes that have two identical parallel bases connected by flat sides. A cube and a cylinder are also prims. Next, explain to the students that right prisms are called so because the base and the faces meet at a right angle. Cuboids, cubes, triangular prisms and cylinders are all right prisms. Students have previously learnt how to calculate the surface area and volume of cube and cuboids. Recall with them the formula and use it for examples in the textbook to help unlock their memory.



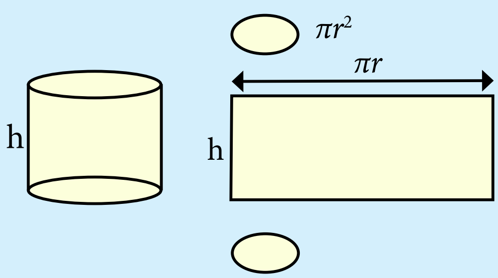
قابلیت ۲:

- composite شکلوں میں رنگ بھرے ہوئے اور خالی حصّوں کے رقبے (area) اور احاطے کا حساب لگا سکیں۔
- دائرے کا محیط (circumferance) اور رقبہ معلوم کرسکیں۔
- کسی بھی سہ ابعادی (3D) شکل بشمول right prims اور سلنڈرز کی سطح کے رقبے اور حجم کا حساب لگا سکیں۔

محرک: طلبہ بنیادی دو ابعادی (2D) اشکال جیسے کہ چوکور (quadrilaterals) اور مثلث (triangles) اور وہ ان کا رقبہ اور احاطہ کا حساب لگانا بھی جانتے ہیں۔ طلبہ کو یاد دلایئے کہ رقبہ، کسی شکل کی حدود میں بند جگہ کو کہتے ہیں۔ جب کہ احاطہ اس شکل کی بیرونی حد کی کل لمبائی ہے۔ اب بورڈ پر ایک دائرہ بنا کر سبق کا آغاز کیجیے اور طلبہ سے پوچھیے کہ وہ اس کا رقبہ اور perimeter کیسے معلوم کریں گے پہلے ان کے جواب سنیے پھر وضاحت سے بیان کیجیے کہ دائرے کے مختلف حصّے ہوتے ہیں جیسے محیط (circumferance) ، نصف قطر (radius)، قطر (diameter)، محیط (circumferance)دائرے کے curve کی کل لمبائی ہے۔ نصف قطر (radius) سے مراد وہ فاصلہ ہے جو دائرے کے مرکز سے اُس دائرے تک ہوتا ہے جب کہ قطر (diameter) radius کا دوگنا ہوتا ہے دائرے کے محیط کو ناپنے کے لیے ایک دھاگے کو اس کے کنارے کے ساتھ رکھیے اور اس دوران خیال رکھیے کہ دھاگے کے دونوں سرے اوور لیپ نہ ہوں پھر دھاگے کو سیدھا کریں اور اسے پیمانے (ruler) پر رکھ کر اس کی لمبائی ناپیں۔ دھاگے کی لمبائی اس کے محیط کو ظاہر کرتی ہے کسی دائرے کے محیط کو قطر سے تقسیم کیا جائے تو حاصل ہونے والا عدد تقریباً 3.14 یا $\frac{22}{7}$ ہوتا ہے اس عدد کو پائی 'pi' کہا جاتا ہے اور اسے علامت π سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

دائرے کے احاطے (perimeter) کی پیمائش کے لیے ہم $C = 2\pi r$ کا فارمولا یا کلیہ استعمال کرتے ہیں جہاں π کی قیمت $\frac{22}{7}$ یا 3.14 کے برابر ہے اور r سے مراد دائرے کا radius ہے اگر کسی سوال میں radius کی بجائے قطر (diameter) دیا گیا ہو تو ہم پہلے قطر کو 2 سے تقسیم کرکے اس کا نصف قطر معلوم کرتے ہیں۔ اسی طرح دائرے کا رقبہ (area) πr^2 کا فارمولا لگا کر معلوم کیا جاتا ہے۔ طلبہ کو مشق میں دی گئی ہدایت کے مطابق سوالات حل کروایئے ان کی مہارت کو بہتر بنانے کے لیے اضافی مشق بھی کروائی جا سکتی ہے قبل اس کے کہ وہ کسی رنگ بھرے یا خالی حصّوں والی composite اشکال کے رقبے اور احاطے کو معلوم کریں۔ اب طلبہ کو واضح طور پر سمجھایئے کہ Composite figure دو یا زیادہ اشکال سے مل کر بنتی ہیں۔ کیونکہ یہ موضوع گزشتہ کلاسوں میں پہلے ہی بیان کیا جاچکا ہے اس لیے طلبہ کو سمجھانے کے لیے درسی کتاب کی مدد لیجیے تاکہ وہ بھرے ہوئے اور خالی حصّوں کے رقبے اور احاطے کو سمجھ سکیں۔

اس کے بعد طلبہ کو پری زم (prism) کی سطح کا رقبہ اور حجم کو معلوم کرنا سکھایئے۔ سطح کے رقبے کی اکائی m^2 ہے جب کہ حجم (volume) کی m^3 ہے طلبہ کو بتایئے کہ پری زم جن کی دو ایک جسی متوازی بنیادیں (bases) ہوتی ہیں جو چپٹی سطح flate sides سے جڑی ہوتی ہیں ایک مکعب (cube) اور سلنڈر (cylinder) پری زم کی مثالیں ہیں جب پری زم کی بنیاد (base) اور اطراف (sides) ایک دوسرے سے right angles پر ملتے ہیں تو ان کو right پری زم کہا جاتا ہے۔ cubes، cuboides، triangular prisms، اور cylinders یہ تمام right prisms کی اقسام ہیں۔ طلبہ پہلے سے یہ جانتے ہیں کہ cube اور cuboids کا surface area کیسے معلوم کیا جاتا ہے ایک بار ان کے ساتھ یہ فارمولا دہرایئے اور درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کو کروایئے تاکہ وہ اپنے حافظے پر زور ڈال کر اپنے سابقہ علم کو تازہ کرسکیں۔



Stack a number of coins over one another and show that the space that fills Using the net of a cylinder, explain to the students that the volume of cylinder is basically the space between two circular bases extended through the height of the cylinder. To find the volume of a cylinder, the area of circle, πr^2, is multiplied by the height, that is πr^2h. The surface area of the cylinder can be calculated according to its net. Show the students, using a net, that a cylinder has a curved surface and the circular base. So, to find the surface area, we know that:

Area of both circular bases = $\pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi r^2$

Area of the curved surface = height × circumference

$= h \text{ x } \pi r = 2\pi rh$

Area of two cicrular bases:

$\pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r^2$

Therefore, the total surface area of a cylinder = circular bases + curved surface

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

total surface area of a cylinder = $2\pi r(r + h)$

Using the examples and exercise questions from the textbook, help the students gain mastery in this competency.

اب آپ طلبہ کو سلنڈر کے حجم کا تصور واضح کرنے کے لیے سکّوں کو ایک دوسرے پر رکھتے جائیں جو جگہ یہ گھیرتے ہیں درحقیقت وہ ایک سلنڈر کے حجم کو ظاہر کرتی ہے۔ مزید وضاحت کے لیے سلنڈر کی net کا استعمال کرتے ہوئے طلبہ کو سمجھائیے کہ کسی سلنڈر کا حجم اس کی اوپر اور نیچے کی گول سطحوں (circular bases) کے درمیان موجود جگہ اونچائی تک پھیلی ہوتی ہے وہی اس کا حجم (volume) ہے۔ کسی بھی سلنڈر کے حجم کو معلوم کرنے کے لیے، دائرے کے رقبے πr^2 کو اس کی اونچائی سے ضرب دیا جاتا ہے۔ πr^2h سلنڈر کی سطح کا رقبہ اس کی net کے حساب سے لگایا جا سکتا ہے۔ یہ بات طلبہ کو سمجھانے کے لیے سلنڈر کا net دکھایئے تاکہ طلبہ سمجھ سکیں کہ اس میں ایک خمیدہ سطح (curved surface) ہوتی ہے اور دو گول بنیادیں (circular bases) لہٰذا surface area معلوم کرنے کے لیے ہم درج ذیل فارمولا استعمال کریں گے۔ ہمیں معلوم ہے کہ :

خمیدہ سطح کا رقبہ = h$2\pi r$

= $2\pi rh$

دونوں گول بنیادوں کا رقبہ = $\pi r^2 + \pi r^2$

= $2\pi r^2$

خمیدہ سطح کا رقبہ = height × circumference

= h × = $2\pi r$

= 2πrh

لہٰذا سلنڈر کا کل سطحی رقبہ = گول بنیادیں + خمیدہ سطح

= $2\pi r^2 + 2\pi rh$

سلنڈر کا کل سطح رقبہ = $2\pi r(r + h)$

اس قابلیت میں مہارت پیدا کرنے کے لیے طلبہ کو درسی کتاب میں دی گئی مشقیں اور مثالیں کروایئے۔

Unit 11

Data Handling

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Recognise the difference between discrete, continuous, grouped, and ungrouped data
- Construct frequency distribution tables for given data (i.e., frequency, lower class limit, upper
- class limit, class interval and mid-point) and solve related real-world problems
- Select and justify the most appropriate graph for a data set and draw simple conclusions based on the shape of the graph
- Differentiate between a histogram and a bar graph
- Construct and compare histograms for both discrete and continues data with equal interval range
- Recognise drawing and interpretation of bar graphs, line graphs, and pie chart
- Draw and interpret bar graph, line graph, and pie chart

Stimulus: Begin the lesson by asking the students to write their number of siblings on a paper. Once all the students have done so, write them all on the board.

0, 3, 2, 4, 1, 1, 1, 0, 0, 5, 5, 3, 2, 1, 0, 0, 2, 2

Now ask the following questions:

- Is the data organised?
- Is the data discreet or continuous?
- Is the data grouped?

Now ask the students if they can analyse the data easily. Students are most likely to say no. This is because they the data is not properly organised. Such data is called ungrouped data. To group this data, it must first be in ascending order and then written in a tabular manner as the following:

The data can then be further analysed in tabular form for using tally marks.

Siblings	Tally	Frequency
0-1		9
2-3		6
4-5		3

The first column of the table is the class interval which is the range of data divided into classes to help analyse the data better. A class has an upper limit (highest value) and a lower limit (lowest value). Frequency is the number of times a data value appears in an interval.

باب
۱۱

شماریات

قابلیت ۱

- مجرد (discrete)، مسلسل (continuous)، گروپ شدہ (grouped) اور غیر گروپ شدہ (ungrouped) ڈیٹا میں فرق کو پہچانیں۔
- دیے گئے ڈیٹا کے لیے فریکوئینسی ڈسٹری بیوشن کے جدول بناسکیں جیسے فریکوئینسی، upper & lower class limit
- کلاس کی حد، کلاس انٹرویل اور درمیانی نقطہ (midpoint) اور حقیقی دنیا سے جڑے عبارتی سوالوں کو حل کرسکیں۔
- ڈیٹا سیٹ کے لیےموزوں ترین گراف کا انتخاب اور جواز پیش کریں اور گراف کی shape کی بنیاد پر سادہ نتائج اخذ کرسکیں۔
- histogram اور بار گراف کے درمیان فرق کرسکیں۔
- مجرد discrete اور مسلسل (continous) ڈیٹا کے لیے مساوی وقفوں کی حد (range) کے ساتھ histograms بناسکیں اور موازنہ کرسکیں۔
- بار گراف، لائن گراف اور پائی چارٹ کو بنائیں اور ان کی وضاحت کرسکیں۔

محرک: سبق کا آغاز کرتے ہوئے طلبہ سے کہیں کہ وہ اپنے بہن بھائیوں کی تعداد ایک کاغذ پر لکھیں جب وہ یہ کام کرلیں تو اسے بورڈ پر نمایاں طور پر لکھ دیں۔

0, 3, 2, 4, 1, 1, 1, 0, 0, 5, 5, 3, 2, 1, 0, 0, 2, 2

پھر ان سے سوالات کیجیے کہ:

- کیا ڈیٹا منظم (organised) ہے؟
- کیا ڈیٹا مجرد (discrete) ہے یا مسلسل (continous)؟
- کیا ڈیٹا گروپ شدہ (grouped) ہے؟

اب طلبہ سے پوچھیے کہ کیا وہ اس ڈیٹا کا تجزیہ آسانی سے کرسکتے ہیں۔ امکان ہے کہ زیادہ تر طلبہ کا جواب ہوگا 'نہیں' اس کی بنیادی وجہ ڈیٹا کا صحیح طور پر ترتیب میں نہ ہونا ہے ایسا ڈیٹا غیر گروپ شدہ ڈیٹا کہلاتا ہے۔ اس ڈیٹا کو گروپ کرنے کے لیے ضروری ہے کہ پہلے یہ صعودی ترتیب (ascending order) میں لکھا جائے اور اگلے مرحلے میں جدول میں درج کیا جائے۔

اس کے بعد ڈیٹا یا اعداد و شمار کا مزید تجزیہ کرنے کے لیے ٹیلی مارکس (Tally marks) کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔

Siblings	Tally	Frequency
0-1		9
2-3		6
4-5		3

جدول کا پہلا کالم class Interval کہلاتا ہے جو ڈیٹا کی حد (range) کو مختلف کلاسوں میں تقسیم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ تاکہ ڈیٹا کا تجزیہ بہتر انداز میں کیا جاسکے۔ ہر کلاس کی دو حدیں ہوتی ہیں ایک بالائی حد یعنی سب سے زیادہ یا بڑی value اور ذیلی حد سب سے کم یا چھوٹی vaule۔ جدول میں تعداد (frequency) وہ تعداد ہے جو ایک خاص وقفے (Interval) میں موجود data کی values کو ظاہر کرتی ہے۔

In the above data, the highest number of siblings were 5 and the lowest number of siblings were obtained 0. The data is spread between these two numbers. The spread of data is called the range of data. It is obtained by subtracting the lowest value from the highest value. The range of the above data set is: 5 – 0 = 5. Students often tend to create wrong class intervals; therefore, it is necessary for them to arrange the data first and then find the highest and lowest data value. However, in case of continuous data, where the values are anywhere within a range, there are no gaps between the upper limit of one class and the lower limit of the other class. The class intervals are continuous. Once the data is collected and organised, the most appropriate graph is selected to represent data. The following table summarises the appropriate graphs and the reason for using it:

Data type	Appropriate graph	Reason
Categorical data	Pie chart and bar graph	To show the frequency of categories
Discrete data	Bar charts and histogram	To show distribution of data across a data set.
Continuous data	Line graphs and histogram	To show distribution of data across a data set and trends

Next, move onto explaining to the students the difference between bar chart and histogram. While a bar chart represents categorical data, a histogram represents continuous numerical data. In bar charts, there are gaps between bars while in histograms, the bars are adjacent to each other. Another important difference is that while the categories on the horizontal axis in a bar graph can be arranged in any order, the horizontal axis in a histogram is a number line where the values have to be arranged in a certain order.Point out to students hat at times, there is a jagged line in the graph along the x- or the y-axis. This line indicates that there are some numbers which are not shown in the graph because there is no data for them. Move onto explaining the students how a histogram is drawn. To create a histogram, draw the horizontal and vertical axis. Next, choose the title of the graph “Number of siblings of students”. Label the horizontal axis “Frequency” and list the intervals across the horizontal axis on a suitable scale. Label the vertical axis “Number of siblings.” For each interval on the horizontal axis, draw a vertical column to the appropriate frequency value. Recall that on a histogram, there are no spaces in between vertical columns.

Once the students understand the basic difference between bar graphs and histograms, move on to explaining to them how data is represented on the line graphs and pie charts. The line graph shows trends over a period of time. This may be done by plotting points on the graphs and joining them using line segments. Line graphs are usually drawn to represent changes in the economy over a period of time or rainfall pattern or even changes in prices of products. Whereas pie charts represents data in a circle. Each sector of a circle represents a category. Since a circle is equal to 360 degrees, each sector of the circle is a fraction of 360 degrees. The value of each category can be calculated by dividing the angle (representing a category) by the sum of angles (that is 360) and then multiplying it to the total. When drawing pie chart, a protractor must be used for proper measurement of each sector.

درج بالا ڈیٹا میں سب سے زیادہ حدیعنی بہن بھائیوں کی تعداد 5 تھی اور سب سے کم حدیعنی تعداد 'O' تھی لہٰذا ڈیٹا ان دو کی وسعت یا حد اعداد کے درمیان ہے یہ وسعت یا حد ہی ڈیٹا کی range ہے۔ اسے حاصل کرنے کے لیے ڈیٹا کی حد range 50 - 5 = ہے اکثر طلبہ کلاس انٹرویل کو بنانے میں غلطی کرتے ہیں۔ اس لیے ضروری ہے کہ پہلے ڈیٹا کو درست طریقے سے منظم کیا جائے اور اس کے بعد سب سے زیادہ اور سب سے کم values کا تعین کیا جائے۔ تاہم مسلسل ڈیٹا (continuous data) ہونے کی صورت میں جہاں values ایک حد range میں رہتے ہوئے کہیں بھی سما سکتی ہیں کیونکہ ایسے ڈیٹا میں کلاس Intervel کے لیے upper limit اور lower limit کے درمیان کوئی gap نہیں ہوتا اور class Intervals بھی مسلسل ہوتے ہیں۔ ایک بار ڈیٹا کو اکٹھا اور منظم کر لینے کے بعد ڈیٹا کی نمائندگی کے لیے موزوں ترین گراف کا انتخاب کیا جاتا ہے۔ درج ذیل جدول موزوں گراف اور اس کو استعمال کرنے کی وجہ کو خلاصے کے طور پر بیان کیا گیا ہے:

ڈیٹا کی قسم	موزوں گراف	استعمال کی وجہ
اقسام والا (Categorical data) کیٹا گورکیل ڈیٹا	پائی چارٹ اور بار گراف	زمرہ جات کو ظاہر کرنے کے لیے categories کی فریکوئنسی یعنی تعداد
غیر مسلسل (Discrete) ڈیٹا	بار چارٹ اور ہسٹو گرام	ڈیٹا سیٹ ہی ڈیٹا کی تقسیم کو ظاہر کرنے کے لیے
مسلسل (Continuous) ڈیٹا	لائن گراف اور ہسٹو گرام	ڈیٹا سیٹ ہی تقسیم اور رجحانات (trends) کو ظاہر کرنے کے لیے

اب طلبہ کو بار چارٹ اور ہسٹو گرام میں پائے جانے والے فرق کو وضاحت سے سمجھائیے کہ ہسٹو گرام مسلسل عددی ڈیٹا کی نمائندگی کرتا ہے جب کہ بار چارٹ catagorical ڈیٹا کی نمائندگی کرتا ہے۔ ایک بار چارٹ میں بار (bars) کے درمیان خلا (gaps) ہوتا ہے جب کہ ہسٹو گرام میں bars ایک دوسرے سے جڑے ہوتے ہیں۔ ایک اور اہم فرق یہ ہے کہ بار گراف میں افقی محور (axes) پر زمرہ جات کو کسی بھی ترتیب میں رکھا جا سکتا ہے۔ ہسٹو گرام میں افقی محور ایک عددی لائن ہے جہاں values کو ایک خاص ترتیب میں رکھا جاتا ہے۔ طلبہ کو بتایئے کہ بعض اوقات گراف کے x یا y محور پر ایک ٹیڑھی لائن (jagged place) دکھائی دیتی ہے جو اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ کچھ اعداد کو گراف میں نہیں دکھایا گیا کیونکہ ان کے لیے کوئی ڈیٹا موجود نہیں ہے۔ اس کے بعد طلبہ کو ہسٹو گرام گراف بنانا سکھایئے اسے بنانے کے لیے اُفقی اور عمودی محور کھینچیے پھر گراف کا عنوان منتخب کیجیے طلبہ کے بہن بھائیوں کی تعداد x محور اور تعداد (frequency) کو عمودی y محور پر لکھیے اور اس افقی محور پر class intervals کو ایک موزوں پیمانے (scale) پر درج کیجیے۔ پھر عمودی محور y پر ''بہن بھائیوں کی تعداد'' کا لیبل لگایئے۔ اب ہر Interval کے لیے اُفقی محور پر دی گئی frequency کے مطابق عمودی کالم بنایئے۔ یہ بات بھی دہرایئے کہ ہسٹو گرام میں عمودی ستونوں (verical column) کے درمیان کوئی gap نہیں ہوتا۔

ایک بار طلبہ بار گراف اور ہسٹو گرام کے فرق کو اچھی طرح سمجھ جائیں تو انھیں بتایئے کہ لائن گراف اور پائی چارٹ میں ڈیٹا کو کس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔ لائن گراف وقت کی خاص مدت میں رجحانات (trends) کو دکھاتا ہے۔ اس میں گراف پر پہلے نقاط (points) کو لگایا جاتا ہے اور پھر انھیں ایک line segment کے ذریعے آپس میں جوڑا جاتا ہے۔ عام طور پر لائن گراف کو ایک خاص عرصے یا مدت کے دوران معیشت میں ہونے والی تبدیلیوں یا ہونے والی بارشوں اور مصنوعات کی قیمتوں میں اتار چڑھاؤں کو دکھانے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ جب تک کہ پائی چارٹ دائرے کی شکل میں ڈیٹا کی نمائندگی کرتا ہے۔ جس میں دائرے کا ہر حصّہ کسی مخصوص زمرے (catagory) کی نمائندگی کرتا ہے۔ ایک دائرہ 360 درجے پر مشتمل ہوتا ہے اس لیے دائرے کا ہر حصّہ (sector) کو زاویوں کے مجموعے (یعنی 360) سے تقسیم کیا جاتا ہے پھر اسے حاصل کل سے ضرب دی جاتی ہے۔ پائی چارٹ کو بنانے کے لیے پروٹیکٹر کی مدد سے ہر زمرے کی درست پیائش کی جاتی ہے۔

Competency 2:

- Calculate the mean, median, and mode for ungrouped data and the mean for grouped data.
- Compare, choose, and justify the appropriate measures of central tendency for a given set of data.

Stimulus: Begin the lesson by recalling that measuring central tendency is one of the statistical tools. Explain to the students that measure of central tendency can be defined as a 'middle' value or perhaps a typical single value of the data that tells us the way in which a group of data gathers around a central value. In other words, it is a way to find or describe the centre of a set of data. The three commonly used measures of central tendency are the mean, the median and the mode. Point out to the students that Central tendency also helps us to compare one data set with another. For example, if we have samples of weight of men and women of a certain age, by calculating the average weight for each sample, comparison between the weights of men and weights of women becomes easy.

Recall with the students that mean of ungrouped data is the sum of all values divided by the number of values in each data set. The mean of a dataset is a single value that represents the entire distribution. For grouped data, the midpoint of each class interval is first calculated by adding the upper and the lower limit of a class interval and dividing it by 2. The midpoint *(x)* is then multiplied by frequency to obtain *fx*.The mean of grouped data is then calculated by dividing the sum of *fx* by *the sum of all f*. At times students tend to forget to calculate *fx* and calculate mean the way they calculate it for ungrouped data, therefore it is necessary to have ample practice using the examples and exercise questions from the book. Next, move on to recalling that median is the middle value of a data set. Point out to the students that the correct median can be calculated only when the data is arranged in an order. For an odd number of values in a data set, the middle value is the median. However, for even the number of values in a data set, the median is the mean of two middle values. Use different examples to help the students master this competency. The third measure of central tendency is the mode, which is the value that appears the most in the dataset. Use the text in the book to help students understand when it is appropriate to use mean, median or mode.

Competency 3:

- Explain and compute the probability of certain events, impossible events and complement of an event

Stimulus: Students are familiar with the idea of probability and the terms associated with it. Recall with the students that probability is the likelihood of an event happening. The scale of probability ranges from 0 to 1, where 0 is impossible and 1 is certain. When a coin is flipped, the probability of getting either heads or tails is equally likely to happen. To calculate theoretical probability of an event, the number of favourable outcomes is divided by the number of all possible outcomes. So, the probability of getting heads or tails is $\frac{1}{2}$. Go through the following key terms of probability:

قابلیت ۲

- غیر گروہی ڈیٹا (ungrouped data) کے لیے mean، mediam اور mode کا حساب لگا سکیں۔ اور گروہی ڈیٹا (grouped data) کا (mean) معلوم کرسکیں۔
- دیے گئے ڈیٹا کے مرکزی رجحان معلوم کرسکیں، اس کا موازنہ کرسکیں اور اس کا جواز پیش کرسکیں۔

محرک: سبق کے آغاز میں طلبہ کو یاد دلایئے کہ مرکزی رجحان کی پیائش شماریات کا ایک tool ہے۔ انھیں وضاحت سے بتایئے کہ مرکزی رجحان کی پیائش (central tendency) کو ڈیٹا کے درمیان والی value یا single value کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے جو ہمیں بتاتی ہے کہ ڈیٹا کا ایک گروپ یا گروہ کس طرح cenrtal value کے گرد جمع ہوجاتا ہے دوسرے الفاظ میں یہ کسی ڈیٹا سیٹ کے مرکز کو تلاش یا بیان کرنے کا ایک طریقہ ہے مرکزی رجحان کی پیائش کی تین اقسام عام ہیں یعنی mean، mediam اور mode طلبہ کو یہ بات بھی بتایئے کہ مرکزی رجحان ہمیں ایک ڈیٹا سیٹ کو دوسرے ڈیٹا سیٹ سے موازنہ کرنے میں مدد دیتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر ہمارے پاس ایک خاص عمر کے مردوں اور عورتوں کے وزن (weight) کے نمونے ہوں تو ہر نمونے کے اوسط وزن کا حساب لگا کر مردوں کے وزن اور عورتوں کا موازنہ بہ آسانی کیا جاسکتا ہے۔

طلبہ کو یاد دہانی کروایئے کہ غیر گروہی ڈیٹا (ungrouped data) کا mean اس کی تمام values کے مجموعے (sum) کو ہر ڈیٹا سیٹ میں موجود values کی تعداد سے تقسیم کرکے حاصل کیا جاتا ہے۔ یہ mean ایک ایسی single value ہے جو پورے ڈیٹا سیٹ کی نمائندگی کرتا ہے۔ گروہی یا گروپ ڈیٹا کے لیے ہر class interval کے mid point کو calculate کرنے کے لیے class interval کی upper and lower values کو جمع (add) کرکے 2 پر تقسیم کردیا جاتا ہے اور بعض اوقات طلبہ fx کا حساب لگانا بھول جاتے ہیں اور mean کو غیر گروہی ڈیٹا (ungrouped data) کے طریقے سے نکالنے کی کوشش کرتے ہیں اس لیے مہارت حاصل کرنے کے لیے ضروری ہے کہ وہ کتاب میں موجود مثالوں اور مشقوں کی زیادہ سے زیادہ مشق کریں۔ اب اس کے بعد طلبہ کو اس بات کی دہرائی کروایئے کہ median ڈیٹا سیٹ کی درمیانی value ہوتی ہے۔ طلبہ کو بتایئے کہ درست media نکالنے کے لیے ضروری ہے کہ پہلے ڈیٹا کی ترتیب کو منظم کیا جائے۔ اگر کسی ڈیٹا سیٹ میں values کی تعداد طاق (odd) ہو تو middle value ہی median ہوتی ہے اگر value کی تعداد جفت (even) ہو تو درمیانی دو values کا mean لیا جاتا ہے۔ اس قابلیت پر عبور حاصل کرنے کے لیے طلبہ کو مختلف مثالوں کو حل کروایئے۔ central tendency کی پیائش کی تیسری قسم mode ہے یہ value کسی ڈیٹا سیٹ میں سب سے زیادہ مرتبہ ظاہر ہوتی ہے درسی کتاب کے متن (text) کا استعمال طلبہ کو یہ سمجھنے میں مدد دے گا کہ کب media، mean اور mode کا استعمال موزوں ہے۔

قابلیت ۳

- بعض اوقات، ناممکن واقعات اور کسی واقعہ کی تکمیل کے امکانات کی وضاحت اور حساب لگا سکیں۔

محرک: طلبہ پہلے ہی سے امکان کے خیال اور اس سے وابستہ اصطلاحات سے واقف ہیں۔ طلبہ کو اس حوالے سے یاد دلائیں اور دہرائیں کہ امکان (Probability) کسی واقعے کے رونما ہونے کا امکان ہے۔ امکان کا پیمانہ (scale 0 سے 1) تک ہوتا ہے۔ جہاں '0' ناممکن ہے اور '1' یقینی ہے۔ جب کوئی سکّہ پھینکا یا اچھالا جاتا ہے تو سیدھا head یا الٹا tail کے آنے کا امکان برابر ہوتا ہے۔ کسی واقعہ کے رونما ہونے نظریاتی امکان کو شمار کرنے کے لیے، سازگار نتائج کی تعداد کو تمام ممکنہ نتائج کی تعداد سے تقسیم (divide) کیا جاتا ہے لہٰذا سیدھا head یا الٹا tail کے آنے کا امکان $\frac{1}{2}$ ہے۔

Outcome	A single possible result of an experiment
Event	Set of one or more outcomes
Sample space	Set of all possible outcomes of an experiment
Experiment	A procedure that can be infinitely repeated and has a well-defined set of possible outcomes
Combined events	Two or more experiments that are conducted together. These experiments can either be repeated or involve two or more objects
Equally likely event	Equal chances of an event happening

Explain to the students that like in sets, complement of an event includes all the outcomes in sample space that are not part of an event. This means that it is an events where the original event does not occur. It is denoted by A'. For example, when rolling a dice to get 2, the complement of the event will be 'not rolling a 2' which includes the outcomes {1, 3, 4, 5, 6}. Complement of an event is calculated by P(not A) = P(A')

P(A') = 1 – P(A). Use the textbook to help students attain mastery in this competency.

امکان کی درج ذیل بنیادی اصطلاحوں کو غور سے پڑھیے۔

نتائج	کسی تجربے کا ایک ممکنہ نتیجہ
واقعہ	ایک یا زیادہ نتائج کا مجموعہ (set)
Sample space	کسی تجربے کے تمام ممکنہ نتائج کا مجموعہ
تجربہ	ایک ایسا طریقۂ کار جسے لامحدود بار دہرایا جاسکتا ہے اور جس کے ممکنہ نتائج کا ایک واضح سیٹ ہے
مشترکہ واقعات	دو یا زیادہ تجربات جو بیک وقت کیے جاتے ہیں یہ تجربات یا تو دہرائے جاسکیں یا دو یا زیادہ اشیا کو شامل کرسکتے ہیں۔
مساوی امکان والے واقعات	کسی واقعے کے رونما ہونے کے مساوی امکانات

طلبہ کو وضاحت سے بتایئے کہ سیٹ کی طرح، کسی واقعے کے تکمیل (complement) میں وہ تمام نتائج (outcomes) ہوئے ہیں جو نمونہ جگہ (sample space) میں موجود ہیں مگر واقعے میں شامل نہیں ہوتے اس کا مطلب ہے کہ یہ ایک ایسا واقعہ ہے جہاں اصل واقعہ رونما نہیں ہوتا۔ اسے A سے ظاہر کیا جاتا ہے مثال کے طور پر 2 کو حاصل کرنے کے لیے ایک چھکّے (dice) کو roll کرتے وقت، واقعہ کی تکمیل ہوگی '2' کا آنا، جس میں نتائج {1, 3, 4, 5, 6} شامل ہیں۔ کسی واقعے کے تکمیل کا حساب لگانے کے لیے یہ فارمولا P(not A) = P(A') استعمال ہوگا۔ P(A') = 1 − P(A) اس قابلیت میں مہارت پیدا کرنے کے لیے درسی کتاب کا استعمال مفید رہے گا۔