Unit 1

Sets

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

Use language, notation, and Venn Diagrams to represent different types of sets and their elements: finite and infinite sets, empty sets, singleton sets, and universal sets

Rationale: The outcome of this competency depends on the student's ability to classify, sort, and organise different data. Students do not have any prior knowledge of the sets, but they must know how to group similar things/numbers together. This serves as a blueprint for learning sets. Learning how to represent sets using language, notation and Venn diagram allows students to enhance their logical and analytical skills. Venn diagrams help the students to compare, contrast, and understand the relationship between two distinct groups or collections.

Using examples, explain to the students that sets are a well-defined collection of objects and there are multiple methods of writing a set. Use a variety of examples to explain different types of sets. Once the students learn how to use the set language and notation, it will be easier to explain the relationship between sets using Venn diagrams.

Stimulus: Create a stimulus to represent sets with a simple activity. Provide different classroom objects to the students and ask them to classify them into two groups based on their attributes, such as colour or texture, etc. Once they classify the objects, ask them if there are any objects with common attributes. Help the students define each set and represent them using a Venn diagram.

Using different examples from everyday lives, such as set of vowels in English language, set of odd numbers less than 10 and set of all the red objects in a classroom, to teach how sets can be written by:

- Listing all the elements of a set in set notation (curly brackets), that is tabular form. Example $W = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- Using words, which is the descriptive form. Example: set of all the whole numbers less than 5.

To further strengthen the methods of writing sets, use examples from the textbook. Once the students can independently write sets as tabular or descriptive methods, move on to explaining several types of sets. The textbook covers six types of sets apart from universal set. Explain that sets with measurable number of elements or member is a finite set, whereas the set with unlimited number of elements is an infinite set. For example, the number of colours in a rainbow is a finite set while the number of colours in the world is an infinite set. Move on to explaining null set (otherwise called empty set) and singleton set. The major difference between both is that null is a completely empty set, that is it has no elements while singleton set has only one element. For example, A = {cities of Pakistan named Edinburgh} is a null set as there is no city in Pakistan named Edinburgh. Whereas B = {capital city of Pakistan} is a singleton set because B = {Islamabad}. Point

باب
۱
سیٹ

قابلیت ۱

مختلف اقسام کے set اور ان کے اجزا (elements) کو ظاہر کرنے کے لیے وین ڈائی گرام، علامتوں (notation) اور زبان کا استعمال کر سکیں جیسے: محدود (finite) لا محدود سیٹ (infinite set) خالی سیٹ (empty set)، اکائی سیٹ (singleton set) اور کائناتی سیٹ (universal set)

استدلال: اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کی مختلف طرح کے ڈیٹا (Data) کی درجہ بندی کرنے اور انھیں ترتیب دینے کی صلاحیت پر منحصر ہے۔ طلبہ کو سیٹ کے بارے میں پیشگی معلومات نہیں ہوتیں لیکن انھیں یہ معلوم ہونا چاہیے کہ ایک جیسی چیزوں یا اعداد کی گروہ بندی کیسے کرنی ہے۔ سیٹ سیکھنے کے لیے یہ بہ طور خاکے کے کام کرے گا۔ sets کو ظاہر کرنے کے لیے sets کی زبان۔ علامتوں اور وین ڈائی گرام کا استعمال کرنا طلبہ کی منطقی اور تجزیاتی مہارتوں کو جلا بخشتا ہے۔ وین ڈائی گرام (venn diagram) کی مدد سے طلبہ دو مختلف گروہوں یا مجموعوں کا موازنہ کر سکتے ہیں اور ان کے مابین تعلق کو بہ خوبی سمجھ سکتے ہیں۔

مثالوں کی مدد سے طلبہ کو سمجھائیے کہ سیٹ (sets) اچھی طرح سے بیان کردہ مختلف چیزوں کا مجموعہ ہیں اور کسی set کو لکھنے کے تین طریقے ہیں۔ اب مختلف مثالوں کی مدد سے مختلف قسم کے sets کی وضاحت کیجیے ایک بار طلبہ sets کو لکھنے کے طریقے اور علامتیں سیکھ لیں گے تو ان کے لیے وین ڈائی گرام کا استعمال کرتے ہوئے sets کے درمیان تعلق کی وضاحت کرنا آسان ہو جائے گا۔

محرک: طلبہ میں محرک پیدا کرنے کے لیے sets کو پیش کرنے کے لیے کلاس میں ایک سادہ سی سرگرمی کروائیے۔ اس کے لیے کمرۂ جماعت میں موجود مختلف اشیا طلبہ کو دیجیے اور ان سے چیز کی درجہ بندی ان کی خصوصیات جیسے ان کے رنگ یا ساخت وغیرہ کی بنیاد پر کروائیے۔ وہ درجہ بندی کر چکیں تو ان سے پوچھیے کہ کیا ان میں مشترک صفات والی کچھ اشیا ہیں۔ ہر سیٹ کی تعریف کرنے میں طلبہ کی مدد کیجیے اور انھیں پیش کرنے کے لیے وین ڈائی گرام کا استعمال کروائیے۔

روزمرّہ زندگی سے لی گئی مختلف مثالوں کے جیسے انگریزی زبان میں حروف علّت (Vowels) کا (set)، 10 سے چھوٹے طاق اعداد (odd numbers) کا sets، کلاس میں موجود تمام سرخ چیزوں کا set وغیرہ کے ذریعے بتائیے کہ سیٹوں (sets) کو کس طرح سے بیان کیا جا سکتا ہے۔

- کسی سیٹ کے تمام اجزا کو درج کرنے کے لیے خطوط وحدانی (curly brackets) کی علامت کا استعمال کرنا جو کہ (sets) کو ظاہر کرنے کے اندراجی طریقہ ہے۔ جیسے Example A = {0, 1, 2, 3, 4}
- الفاظ کا استعمال جو کہ (sets) کو لکھنے کا بنانیہ انداز ہے جیسے 5 سے چھوٹے مکمل اعداد کا سیٹ (set)

سیٹوں کو لکھنے کے طریقوں کو مزید پختہ کرنے کے لیے، نصابی کتاب میں دی گئی مثالیں استعمال کیجیے۔ طلبہ ایک بار sets کی اندراجی (tabular) یا (descriptive) شکل میں ظاہر کرنے کا طریقہ سیکھ لیں تو یکے بعد دیگرے انھیں مختلف اقسام کے (sets) کو سکھاتے جائیے۔ یہ درسی کتاب کائناتی سیٹ کے علاوہ 6 مختلف اقسام کے سیٹوں کا احاطہ کرتی ہے۔ وضاحت کیجیے کہ وہ sets جس کے ارکان یا اجزا کو گنا جا سکے وہ ایک محدود (finite set) ہے۔ اور وہ sets جس کے اعداد یا اجزا کو گنا نہ جا سکے ایک لامحدود (infinite set) ہے۔ مثال کے طور پر قوس قزح میں رنگوں کی تعداد ایک (infinite set) ہے جب کہ دنیا میں موجود رنگوں کی تعداد ایک لامحدود سیٹ (infinite sets) ہے۔ اب مزید آگے بڑھتے ہوئے (null set) جسے خالی سیٹ (empty set) کہتے ہیں (singleton set) کی وضاحت کیجیے۔ دونوں کے درمیان بنیادی فرق یہ ہے کہ (null set) بالکل خالی ہوتا ہے یعنی اس میں اجزا یا ارکان موجود نہیں ہوتے جب کہ اکائی سیٹ (singleton set) میں صرف ایک رُکن ہوتا ہے مثال کے طور پر

A = {cities of Pakistan named Edinburgh}

out that the symbol of null/empty set is different from all the other notations as it is represented by the Greek letter called 'phi' and written as ∅. It is important to note that an empty set is never represented as {∅} as it would mean that a set contains one element which is ∅.

Equal and equivalent sets may appear confusing. However, the best way to explain the difference is that equal sets have the exact same elements, even if the order is different. Whereas the equivalents set have the same number of elements, but the members of the set may be different from one another. It is important to note that all equal sets are equivalent, but not all equivalent sets are equal as the elements may differ. Use examples from the textbook to support your explanation.

Knowing what a universal set is essential as it is a steppingstone to understanding how Venn diagrams are drawn or made. Universal set is a set of all elements that are under consideration for a particular scenario. For example, if Set A = {name of all the boys in a classroom}, then universal set (U) is {name of all the students in a classroom}. Point out that a universal set can either be finite or infinite. Move towards explaining Venn diagrams as a way of representing relationship between two sets. Elements of a set in a Venn diagram are written within a circle, while the universal set is represented in a rectangle. A set (represented as a circle) is drawn within the rectangle representing the universal set, since all elements of the set are part of the universal set.

Incorporate examples from the textbook to support your explanation and use exercises as practice to strengthen the concept in students. For class practice, you may also provide students with different examples or worksheets of sets and ask them to classify them as finite, infinite, empty, singleton and/or universal set. The following example can be used:

- A Set of planets in the solar system
- A Set all the books in the library
- A Set of animals which have 4 limbs.

{پاکستان کے شہروں میں ایڈنبرگ نامی شہر} یہ ایک (null set) کی مثال ہے کیونکہ پاکستان میں ایسا کوئی شہر نہیں جس کا نام ایڈنبرگ ہو۔ جیسا کہ {پاکستان کا دارالحکومت} = B یہ ایک اکائی سیٹ (singleton set) ہے۔ {اسلام آباد} = B نشان دہی کیجیے کہ (null set) کی علامت دیگر تمام علامتوں سے مختلف ہے کیونکہ اسے یونانی حرف 'Phi' سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے بطور ∅ لکھا جاتا ہے یہاں یہ بات قابلِ غور ہے کہ کسی (null set) یا خالی سیٹ کو کبھی {∅} یوں نہیں لکھا جاتا۔ کیونکہ اس کا مطلب ہے کہ یہ سیٹ ایک رکن پر مشتمل ہے جو کہ خود ∅ ہے۔ (equal set) اور (equivalent set) دیکھنے میں پیچیدہ لگتے ہیں تاہم فرق کی وضاحت کا بہترین طریقہ یہ ہے۔ (equal set) میں وہی ارکان یا اجزا ہوتے ہیں خواہ ترتیب مختلف ہو۔ جب کہ مترادف سیٹ (equivalent set) میں اجزا کی تعداد وہی ہوتی ہے لیکن ان کے ارکان ایک دوسرے سے مختلف ہو سکتے ہیں۔

یہاں یہ بھی قابل غور ہے کہ تمام مساوی (equal set)، مترادف (equivalent) ہیں لیکن تمام مترادف سیٹ (equivalent set) کا مساوی (equal) ہونا ضروری نہیں ہے کیونکہ ارکان (element) مختلف ہو سکتے ہیں مزید وضاحت کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں سے مدد لیں۔

طلبہ کے لیے یونی ورسل سیٹ (universal set) کو جاننا اس لیے بھی ضروری ہے کہ یہ وہ ابتدائی قدم ہے جس کی مدد سے طلبہ وین ڈائی گرام کو بنانا بہ آسانی سیکھ سکیں گے۔ یونی ورسل سیٹ ان تمام ارکان یا اجزا کا مجموعہ ہے جو کسی خاص صورت حال کے لیے زیرِ غور ہیں۔ مثال کے طور پر اگر سیٹ A = {ایک کلاس روم میں تمام لڑکوں کا نام}، تو یونی ورسل سیٹ ہے {ایک کلاس روم میں تمام طلبہ کا نام} اس بات کی نشان دہی بھی کیجیے کہ یونی ورسل سیٹ یا تو محدود یا لامحدود بھی ہوسکتا ہے۔ دو سیٹوں کے مابین تعلق کو وین ڈائی گرام کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے وین ڈائی گرام میں کسی سیٹ کے تمام ارکان کو ایک دائرے میں لکھا جاتا ہے جبکہ کائناتی سیٹ کو ایک مستطیل سے ظاہر کیا جاتا ہے کسی set کو یونی ورسل سیٹ کے ساتھ ظاہر کرنے کے لیے اس کے دائرے کو کائناتی سیٹ کے مستطیل کے اندر بنایا جاتا ہے۔

درس کتاب میں دی گئی مثال کو استعمال کر کے اپنی وضاحت کو بہتر بنائیے اور مشق میں دیے گئے سوالوں کی مدد سے طلبہ کے ذہن میں تصورات کو مستحکم کیجیے۔

جماعت میں مشق کروانے کے لیے آپ مختلف مثالوں اور سیٹوں کے لیے ایسی ورک شیٹ کا استعمال کر سکتے ہیں جس میں طلبہ کو سیٹوں کی درجہ بندی finit - infinite - empty - singliton / یا یونی ورسل سیٹ میں کرنی ہو۔

مندرجہ ذیل مثالوں کو استعمال کیا جا سکتا ہے۔

- نظام شمسی میں موجود سیاروں کا سیٹ
- لائبریری میں موجود تمام کتابوں کا سیٹ
- چار ٹانگوں والے جانوروں کا سیٹ

Unit 2

Integers

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Recognise, identify, and represent integers (positive, negative, and neutral integers) and their absolute or numerical value.
- Arrange a given list of integers or their absolute values in ascending and descending order.

Rationale: Students have prior knowledge of whole numbers, decimals, and fractions. The outcome of this competency will allow students to use numbers beyond counting and measuring and help them in understanding real-world contexts, such as temperature, direction, coordinates, elevations, bank balance, etc. Integers also lay the basis for advanced topics, such as coordinate geometry, algebra and data representation and interpretation. Furthermore, understanding the difference between absolute value and numerical value and its use is crucial for mathematical fluency. It helps the students understand distance and magnitude of numbers on the number line. Integers, including their numerical and absolute value, lay the foundation for coordinate geometry, algebra and data representation and interpretation.

Using a number line as the core concept, explain to the students what positive and negative integers are. Once they know the difference, explain the difference between absolute and numerical value of numbers.

Stimulus: Start the lesson by asking simple questions, such as how many days there are in a year, how many legs an elephant has, without introducing the term 'integers', explain the difference between natural numbers and whole numbers. Natural numbers start from 1 and are used to express countable things present in nature. Whole numbers, however, are a type of natural number but also include 0. Use the reference of number line from the textbook to support your explanation. The same number line will further be used to compare whole numbers. Students must be familiar with the signs of comparison ("<" and ">"). On the number line, ask students to compare two numbers. For example, based on their position on the number line, ask the students to determine which number is greater or lesser:

- 4 and 3
- 0 and 7
- 5 and 9
- 0 and 6

باب
۲

صحیح اعداد

قابلیت ا

- Integers (مثبت، منفی اور neutral) کی مطلق یا عددی قدر کو پہچان اور شناخت کر سکیں۔
- دیے گئے صحیح اعداد اور ان کی مطلق قیمت کو ترتیب صعودی (ascending order) اور ترتیب نزولی (descending order) میں لکھ سکیں۔

استدلال: طلبہ مکمل اعداد اعشاریہ اور کسر کو پہلے سے جانتے ہیں۔ اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کو گنتی اور پیمائش سے بالا تر ہو کر اعداد کا استعمال کرنے اور حقیقی زندگی کے تناظر میں انھیں سمجھنے میں مدد دے گا جیسے درجۂ حرارت، سمت، کوآرڈی نیشن، بلندی، بینک بیلنس وغیرہ۔ صحیح اعداد (integers)، پیچیدہ موضوعات کے لیے بنیاد فراہم کرتے ہیں جیسے کہ کوآرڈینیٹ جیومیٹری (coordinate geometry) الجبرا اور ڈیٹا کو پیش کرنا اور تشریحات وغیرہ، مزید برآں absolute value اور Numerical Value کے مابین فرق کو سمجھنا اور یہ بھی کہ ریاضیاتی روانی کے لیے اس کا استعمال بہت ضروری ہے۔ ان سے طلبہ کو عددی لکیر پر اعداد کے فاصلے (distance) اور عدد کی قیمت (magnitude of number) کو سمجھنے میں مدد ملتی ہے۔ integers بشمول اپنی numerial اور absolute ویلیو، ریاضی جیسے مضمون میں کوآرڈینیٹ جیومیٹری، الجبرا اور ڈیٹا کی نمائندگی (representation) اور تشریح (interpretetion) کی بنیاد فراہم کرتے ہیں۔

عددی لکیر (number line) کو بنیادی مواد کے طور پر استعمال کرتے ہوئے طلبہ کو سمجھایئے کہ مثبت اور منفی اعداد کیا ہیں جب طلبہ ان کا فرق جان لیں تو اعداد کی obsalute اور numerical value کے مابین فرق کو وضاحت سے بیان کیجیے۔

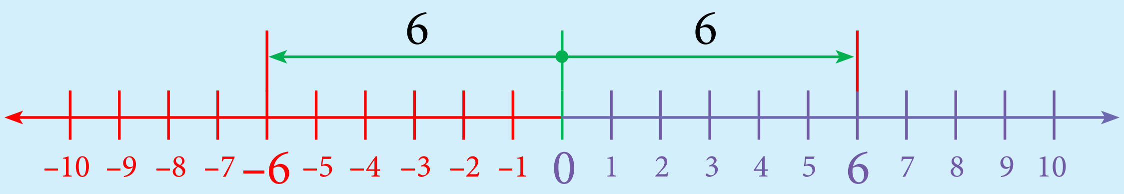
محرک: طلبہ سے آسان سوالات پوچھتے ہوئے سبق کا آغاز کیجیے جیسے ایک سال میں کتنے دن ہوتے ہیں؟ ہاتھی کی کتنی ٹانگیں ہوتی ہیں؟ وغیرہ Integers کی اصطلاح متعارف کروائے بغیر طلبہ کو natural numbers اور whole number کے درمیان فرق سمجھایئے۔ قدرتی اعداد (natural number) وہ ہیں جو 1 سے شروع ہوتے ہیں اور یہ فطرت (nature) میں موجود قابلِ شمار چیزوں کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔ جب کہ مکمل اعداد (whole number) ایک طرح سے قدرتی اعداد (natural number) ہی ہیں لیکن اس میں 0 (zero) بھی شامل ہے اپنے بیان کی وضاحت کے لیے درسی کتاب میں دی گئی عددی لکیر (number line) کا حوالہ دیجیے۔ اسی number line کا استعمال کرتے ہوئے طلبہ کو whole numbers کا موازنہ کرنا سکھایئے۔ اس کے لیے ضروری ہے کہ طلبہ موازنے کی علامت ("<" اور ">") سے پہلے سے واقف ہوں۔ اب نمبر لائن پر طلبہ سے دو اعداد کا موازنہ کرنے کے لیے کہیں مثلاً نمبر لائن پر کسی نمبر کی پوزیشن یا مقام کی بنیاد پر یہ فیصلہ کرنا کہ کون سا عدد بڑا ہے یا چھوٹا:

- 3 اور 4
- 7 اور 0
- 9 اور 5
- 6 اور 0

Once the students compare the number, ask them to add and subtract the pairs using the same number line.

Move on to another scenario-based activity where the students are given a list of temperatures of different countries (include both positive and negative temperatures). Ask the students what they think the positive and negative signs are before the number indicates. Once the students present their answers, explain that positive numbers usually indicate higher/warmer temperature while the negative numbers indicate lower/colder temperature. Indicate that 0° is used as a point of reference as it is neither negative nor positive. Draw a number line on the board again, making sure the markings on it are equidistant. Next, use the same number line to show that the negative integers are on the left of '0' and positive numbers are on the right of '0'. Since 0 is neither negative nor positive, it is a neutral integer. The same number line will be used to compare two integers. Point out that the integers on the number line increase to the right and decrease to the left. So, the positive integers will always be greater than the negative integers.

Once the concept of integers has solidified, move on to explaining the absolute value of integers. The absolute value of any number is its distance from 0 on the number line, regardless of its direction. Take 6 for example.



The number +6 or −6 is six points away from 0 in both directions. This is why the absolute value of +6 and −6 will be 6. Point out that the absolute value of any integer is denoted by two vertical bars on either side of the number. So, |+6| and |−6| = 6.
Point out that ordering absolute integers is the same as ordering whole numbers. For example, |−7|, |20|, |−15|, |−4| can be arranged in ascending order by:

- First, finding their absolute values: 7, 20, 15, 4
- Next, arranging them in ascending order: 4, 7, 15, 20
- Finally, matching each absolute value to its original number: |−4|, |−7|, |−15|, 20.

The same method can be applied when arranging the absolute values of numbers in descending order.

Competency 2

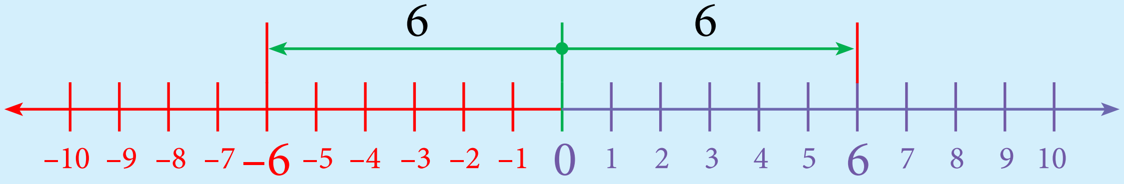
- Add and subtract up to 2-digit like and unlike integers

Stimulus: Addition and subtraction of numbers is carried out at primary level and students already have prior knowledge of it. However, subtraction at primary level is taught by subtracting the smaller

جب طلبہ نمبروں کا موازنہ کر چکیں تو انھیں اسی نمبر لائن کو استعمال کرتے ہوئے ان ہی pairs کو جمع اور تفریق کرنے کے لیے کہیے۔

اب طلبہ کو ایک اور صورتِ حال پر مبنی سرگرمی کروایئے جس میں انھیں مختلف ممالک کے درجۂ حرارت کی فہرست (جس میں positive اور negative دونوں طرح کے درجۂ حرارت موجود ہوں) فراہم کیجیے۔ طلبہ سے اس حوالے سے پوچھیے کہ دیے گئے درجۂ حرارت کے ساتھ positive اور negative کی علامات کس بات کی نشان دہی کر رہی ہیں۔ طلبہ کی طرف سے دیے گئے جوابات سننے کے بعد آپ وضاحت کیجیے عموماً positive number بہت زیادہ یعنی گرم درجۂ حرارت کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ negative number کم یعنی سرد درجۂ حرارت کی علامت ہیں طلبہ کو بتایئے کہ 0° کو حوالے کے نقطے کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے کیونکہ یہ نہ تو منفی ہے اور نہ ہی مثبت اب بورڈ پر دوبارہ number line کو کھینچتے ہوئے مساوی فاصلوں پر نشانات لگایئے۔ پھر اسی نمبر لائن پر منفی اعداد کو '0' کے بائیں طرف لکھتے جایئے اور مثبت اعداد '0' کے دائیں طرف کیونکہ '0' نہ تو مثبت ہے اور نہ ہی منفی یہ ایک neutral integer ہے۔ طلبہ کو سمجھایئے کہ دو اعداد کا موازنہ کرنے کے لیے یہ ایک ہی نمبر لائن استعمال ہو گی۔ اس عددی لکیر یا نمبر لائن پر integers دائیں طرف بڑھتے ہیں اور بائیں طرف گھٹتے ہیں اس لیے positive integers ہمیشہ negative integers سے مقابلتاً بڑے ہوتے ہیں۔

جب طلبہ کے اذہان میں integers کا تصور پختہ ہو جائے تب آپ integers کی مطلق قیمت (absolute value) کی وضاحت کیجیے۔ کہ اس سے مراد نمبر لائن پر موجود کسی عدد کا '0' سے فاصلہ ہے خواہ اس کی سمت دائیں ہو یا بائیں مثال کے طور پر 6 کو دیکھیے۔



نمبر لائن کو غور سے دیکھیے یہاں پر عدد 6+ یا 6- دونوں سمتوں میں 0 سے 6 نشانات یا پوائنٹس کے فاصلے پر ہے لہٰذا اس کی مطلق قیمت (absolute value) 6 ہو گی۔ وضاحت کیجیے کہ کسی integer کی absolute value کو عددی لکیر پر عدد کے دونوں طرف دو عمودی لکیروں (vertical bars) کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے لہٰذا | 6+ | اور | 6- | = 6

نشان دہی کیجیے کہ Integers کی absolute value کو ترتیب دینا ایسا ہی ہے جیسے کہ whole number کو ترتیب دینا۔

مثال کے طور پر | 7- |، | 20 |، | 15- |، | 4- | کو صعودی طور پر یوں ترتیب دیا جا سکتا ہے۔

- پہلے ان کی absolute value معلوم کیجیے: 4، 15، 20، 7
- پھر انھیں ascending order میں لکھیے: 4، 7، 15، 20
- آخر میں ان کی absolute value کو اس کے اصل نمبر سے ملانا: | 4- |، | 7- |، | 15- |، 20

اعداد کی absolute value کو descending order میں ترتیب دینے کے لیے بھی یہی طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

قابلیت ۲

طلبہ مثبت، منفی اور neutral integers کو دو ہندسی اعداد تک جمع یا تفریق کر سکیں۔

محرک: اعداد کی جمع اور تفریق کو پرائمری جماعتوں سے کروایا جا رہا ہے لہٰذا طلبہ کو اس کا پہلے سے علم ہے تاہم پرائمری سطح پر تفریق یا گھٹانے کا عمل صرف بڑے عدد میں سے چھوٹے عدد کو گھٹا کر سکھایا جاتا ہے۔ لیکن اب طلبہ مثبت یا منفی علامات والے Integers کو جمع یا تفریق کرنا سیکھیں گے۔

number from the bigger number only. Here the students will learn to subtract bigger numbers from a smaller number, add and subtract integers with either positive or negative signs.

Write a simple addition example, such as 3 + 5 = ? on the board. Ask the students to solve it. Once they do, ask them how they would approach the sum if a positive sign were added before both the numbers, such as +5 + 8 = ? Give them time to brainstorm and then draw a number line. Explain to them that a number line can be easily used to add or subtract integers. To add +5 +8, start at 0 and then move 5 units to the right to land on +5 and then move 8 more units. The number you land on is the sum of +5 +8, which is +13. Point out to the students that adding two positive integers will always result in a positive answer.

Move on to adding a positive integer to a negative integer. Provide the students with the same example but replace the positive integers with the negative integer, that is –5 + –8 = ?. What would the answer be? Allow them time to brainstorm how they will approach the problem. Let them know that to solve any addition of integers, we can use the number line. Start from 0 and move 5 units to the left to land on –5 and then move 8 units further. The final number you land on is the sum of –5 + –8 = –13. Point out to students that adding two negative integers will always result in a negative answer.

Once the students get a grasp on how to add like integers (integers with the same sign), move on to adding unlike integers, that is a positive and a negative integer, For example –4 + 2 = ? The positive and negative signs within one equation may be confusing for the students so you can advise them to put the integers within brackets like (–4) + 2 = ? on the number line, move 4 units to the left from 0 to land on –4 and then move 2 units to the right (to indicate positive integer). The final number you land on will be the sum of –4 + 2 = –2. Point out that when adding unlike integers, the sum would have the sign of the greater number, negative in this case, as 4 is greater than 2. Use examples and exercises from the textbook to further solidify the concept of addition of like and unlike integers within students. Extra attention should be given to the signs of answers as it can be confusing to students. After the students have solidified this concept, ask them to solve some questions without the number line as well.

Subtraction of integers is similar to how addition is done. When subtracting unlike integers, the final answer has the sign of the number with greater numerical value. For example, 7 – 5 = 2 and 5 – 7 = –2. When subtraction includes a positive and a negative integer, for example, 8 – (–3) = ? It is always better to put one of the integers within brackets to avoid confusion. Since both the negative signs appear before 3, they become positive. And the equation becomes 8 + 3 = 11. The sign before the answer also becomes positive. To strengthen the students' concept, use examples from the book to practise in the classroom. You may also use the number line to teach students subtraction of integers.

بورڈ پر ایک سادہ مثال لکھیے جیسے 3 + 5 = ? اور طلبہ سے کہیے کہ اسے حل کریں۔ جب طلبہ اسے حل کر چکیں تو ان سے پوچھیے کہ اگر دونوں ہندسوں کے ساتھ positive (+) کی علامت ہو جیسے +5 + 8 = ? تو پھر وہ اسے کس طرح حل کریں گے۔ طلبہ کو سوچنے کے لیے کچھ وقت دیجیے۔ اب بورڈ پر ایک عددی لکیر کھینچیے اور طلبہ کو بتائیے کہ Integers کی جمع اور تفریق وہ عددی لکیر کی مدد سے بہ آسانی کر سکتے ہیں۔ 8 + 5 کو جمع کرنے کے لیے آپ 0 سے شروع کریں اور عددی لکیر پر صفر سے دائیں طرف گنتے ہوئے +5 یعنی 5 یونٹس تک پڑھیے۔ پھر +8 کو جمع کرنے کے لیے عددی لکیر پر مزید آگے بڑھتے ہوئے +8 یعنی مزید 8 یعنی مزید 8 یونٹس تک گن کر پہنچ جائیے اب 0 سے فاصلے کو عددی لکیر پر گنیے یہ کل 13 یونٹ ہوئے یعنی + 5 + 8 کو جمع کرنے پر جواب +13 ملے گا یہاں طلبہ کو سمجھائیے کہ جب دو مثبت علامت والے Integers کو جمع کیا جائے تو جواب بھی positive ہو گا۔

اب اسی مثال کو آپ منفی علامت والے integers کی جمع سکھانے کے لیے استعمال کیجیے لیکن آپ کو Positive integers کی جگہ negative integers لکھنا ہوں گے یعنی ? = -8 + -5 کو جمع کرنے پر کیا جواب حاصل ہو گا؟ سوال حل کرنے کے لیے طلبہ کو سوچنے کا وقت دیں۔ انھیں بتائیے کہ Integers کو جمع کرنے کے لیے ہم عددی لکیر کا استعمال کر سکتے ہیں۔ '0' سے شروع کریں اور بائیں طرف گنتے ہوئے -5 پر پہنچ جائیے پھر مزید آگے بڑھتے ہوئے -8 یعنی مزید 8 تک بائیں طرف گن کر پہنچیے اب 0 سے لے کر آخری نمبر تک گنیے یہ کل 13 یونٹس ہوئے یعنی 13 = -8 + -5 لہٰذا جواب بھی -13 ہو گا طلبہ کو سمجھائیے کہ جب منفی علامت والے Integers کو جمع کیا جائے تو جواب میں negative integers ہی ملے گا۔

ایک بار طلبہ منفی یا مثبت علامت والے Integers کو جمع کرنے کا عمل سمجھ لیں۔ تب آپ انھیں مختلف علامت والے Integers جیسے Positive اور negative integers کی جمع سکھانے کا آغاز کیجیے: مثال کے طور پر ? = 2 + -4 ایک ہی سوال میں مثبت اور منفی علامتوں کی موجودگی طلبہ کے لیے باعث پریشانی تو ہو گی اس لیے آپ علامت والے Integer کو بریکٹ میں کر دیجیے جیسے ? = 2 + (-4) اب آپ number line پر 0 کے بائیں طرف گنتے ہوئے 4 تک جائیے اور پھر جمع کرنے کے لیے 2 اکائیاں دائیں تک جائیے۔ جس نمبر تک آپ آخر میں پہنچیں گے یعنی -2 = 2 + -4 جواب بھی وہی ہو گا۔ اب اس بات کی نشان دہی کیجیے جب مختلف علامتوں والے Integers کو جمع (add) کیا جاتا ہے تو حاصل ہونے والے جواب کے ساتھ وہ علامت لگائی جاتی ہے جو بڑے عدد کے ساتھ لگی ہو۔ جیسے کہ اس مثال میں لگائی جانے والی منفی علامت جو بڑے عدد 4 کے ساتھ لگی ہے جو مقابلتاً 2 سے بڑا ہے۔ طلبہ کے اذہان میں اس تصور کو پختہ کرنے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مشقوں اور مثالوں کا استعمال کیجیے۔ اس تصور کی پختگی کے بعد طلبہ سے کہیں کہ وہ نمبر لائن کو استعمال کیے بغیر کچھ سوالات کو حل کریں۔

Integers کی نفی (Substraction) بھی جمع کی طرح ہے۔ جب مختلف علامتوں والے Integers کو نفی کیا جاتا ہے۔ تو جواب کے ساتھ وہ علامت لگائی جاتی ہے جو بڑی numercial value کے ساتھ لگی ہو۔ مثال کے طور پر 2 = 5 - 7 اور -2 = 7 - 5 جب Positive اور negative integer کی Substraction کی جاتی ہے مثال کے طور پر (-3) - 8 = ؟ یہاں پیچیدگی سے بچنے کے لیے کسی بھی ایک Integer کو بریکٹ میں لکھ دیا جاتا ہے۔ کیونکہ نفی کی دونوں علامتیں 3 سے پہلے موجود ہیں لہٰذا یہ مثبت Positive ہو جائیں گی۔ اور سوال 11 = 3 + 8 ہو

Competency 3

- Multiply and divide up to 2-digit like and unlike integers

Stimulus: The students have already learnt multiplication as the repeated addition of equal groups. They also have prior knowledge of skip counting. Use that knowledge to teach multiplication of integers. Multiplication of integers can be either done using a number line or by recalling multiplication tables. For multiplication of two positive integers, the product will always remain positive. When the two negative integers are multiplied, the product remains positive. However, for multiplication of unlike integers, such as a positive and a negative, the product will always be a negative. Look at the following examples:

$+5 \times +4 = +20$

$-5 \times -4 = +20$

$-5 \times 4 = -20$

$5 \times -4 = -20$

Use examples from the textbook for guided practice in the classroom.

Division of integers is done in the similar way as division of whole numbers; however, extra attention is given to the signs. As in multiplication, the division of two positive and two negative integers always results in a positive quotient as well. Whereas the division of two unlike integers (one positive and one negative) always results in a negative quotient.

For example:

$+81 \div +9 = +9$

$+81 \div +9 = +9$

$-81 \div 9 = -9$

$81 \div -9 = -9$

The students also have prior knowledge that division is successive subtraction. You may use that knowledge to divide integers using a number line.

Competency 4

- Verify commutative, associative, and distributive laws (where applicable) of addition and multiplication.

Stimulus: Commutative law suggests that the sum or product does not change if the order of numbers is changed. Integers, when added or multiplied follow this law. Use different examples within the classroom to prove this property. The following examples may be used:

جائے گا۔ جواب کے ساتھ بھی Positive کی sign لگائی جائے گی۔ اس تصور کی مزید وضاحت کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کو کمرۂ جماعت میں حل کروائیے۔ طلبہ کو Integers کی Substraction سکھانے کے لیے نمبر لائن کا استعمال بھی کیا جا سکتا ہے۔

قابلیت ۳

- ایک جیسی اور مختلف علامتوں والے Integers کی دو ہندسوں تک ضرب اور تقسیم کر سکیں۔

محرک: طلبہ ضرب کو گروپ کی شکل میں جمع کو دہرائے جانے والے عمل کے طور پر جانتے ہیں integers کی ضرب نمبر لائن کا استعمال کر کے یا ضربی جدولوں (پہاڑ سے) کو یاد کر کے انجام دی جا سکتی ہے۔ دو مثبت Integers کو ضرب دینے پر Product ہمیشہ Positive ہی رہے گا۔ جب دو Negative integers کو ضرب دیا جائے تو Product تب بھی Positive ہی رہے گا۔ تاہم جب دو مختلف علامتوں والے Integers جیسے Positive اور negative کو ضرب دیا جائے تو پروڈکٹ بھی negative ملے گا۔ درج ذیل مثالوں کو دیکھیے:

$+5 \times +4 = +20$

$-5 \times -4 = +20$

$-5 \times 4 = -20$

$5 \times -4 = -20$

درسی کتاب میں دی گئی مشقوں کو کمرۂ جماعت میں اپنی نگرانی میں کروائیے۔

Integers کی تقسیم اسی طرح کی جاتی ہے جیسے کہ whole number کی؛ تاہم یہاں علامتوں (signs) کو بھی اضافی توجّہ دی جاتی ہے۔ کیونکہ جب بھی دو Positive یا negative integers کو ضرب دیا جائے تو نتیجے میں ایک positive qudient ملتا ہے۔ جب کہ دو مختلف علامتوں والے Integers (ایک مثبت یا منفی) کو تقسیم کرنے پر نتیجے میں ہمیشہ ایک negative qudient حاصل ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر

$+81 \div +9 = +9$

$+81 \div +9 = +9$

$-81 \div 9 = -9$

$81 \div -9 = -9$

طلبہ جانتے ہیں کہ تقسیم دراصل لگاتار گھٹاؤ (Successive subtraction) ہے۔ آپ اس کے تحت Integers کی تقسیم کرتے ہوئے نمبر لائن کا استعمال کر سکتے ہیں۔

قابلیت ۴

جمع اور ضرب کے commutative، associative اور distributive قوانین (کا اطلاق جہاں لاگو ہوں) کی تصدیق کر سکیں۔

$7 + 8$

$-4 + -5$

$-5 + 2$

1×-9

-6×-3

As a hands-on activity, arrays may also be used to indicate that regardless of the order, the sum or product of two integers does not change. For each of the aforementioned examples, use counters to prove the commutative property of integers. However, when the order of integers is changed when subtracting, the answer changes. Therefore, subtraction of integers does not follow the commutative law. Addition and multiplication of integers also follow the associative law. The grouping of numbers does not change the sum or product of three numbers. In the following example, the grouping of numbers does not change the sum. Ask the students to solve the following example to strengthen their concept.

$(2+ (-4)) + 6 = 2 + ((-4) + 6)$

Integers also follow the distributive law of multiplication over addition and distributive law of multiplication over subtraction. Using examples from the textbook, explain to the students that to determine if certain statements follow a particular law, we must solve them.

محرک: Commutative law یہ بتاتا ہے کہ جمع یا ضرب ہونے والے دو اعداد کی ترتیب کو بدلنے سے ان کا مجموعہ (sum) یا حاصل ضرب (product) تبدیل نہیں ہوتا۔ صحیح اعداد (Integers) کی جمع یا ضرب اس قانون کے تحت کی جاتی ہے اس خاصیت کو ثابت کرنے کے لیے کمرۂ جماعت میں مختلف مثالوں کو حل کروائیے۔ مندرجہ ذیل مثالوں کو بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

$7 + 8$

$-4 + -5$

$-5 + 2$

1×-9

-6×-3

سابقہ سرگرمی کا استعمال کرتے ہوئے اس کی نشان دہی کیجیے کہ دو صحیح اعداد کی ترتیب کو بدلنے سے ان کے مجموعے یا حاصل ضرب پر کوئی فرق نہیں پڑتا۔ صحیح اعداد (Integers) کی Commutative Property کو ثابت کرنے کے لیے اوپر دی گئی مثالوں کے لیے counters کا استعمال کیجیے۔ تاہم گھٹانے کے عمل میں صحیح اعداد (Integers) کی ترتیب کو بدلنے سے جواب بھی تبدیل ہو جاتا ہے۔ لہٰذا صحیح اعداد کی Substraction پر Commutative law کا اطلاق نہیں ہوتا۔ صحیح اعداد کی جمع اور نفی پر associative law کا اطلاق ہوتا ہے تین اعداد کی مختلف گروہ بندی ان کے مجموعے یا حاصل ضرب پر اثر انداز نہیں ہوتی۔ درج ذیل مثال میں اعداد کی گروہ بندی اس کے مجموعے (sum) پر اثر انداز نہیں ہوتی۔ اس تصور کی پختگی کے لیے طلبہ سے درج ذیل مثال کو حل کرنے کے لیے کہیں۔

$(2+ (-4)) + 6 = 2 + ((-4) + 6)$

صحیح اعداد، جمع اور تفریق پر (distributive law) کی پیروی کرتے ہیں۔ درسی کتاب سے مثالوں کا استعمال کرتے ہوئے طلبہ کو سمجھائیں کہ یہ ثابت کرنے کے لیے کہ اگر کچھ بیانات کسی خاص قانون کی پیروی کرتے ہیں تو ہمیں انھیں حل کرنا چاہیے۔

Unit 3

Order of Operations

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Recognise the order of operations and use it to solve mathematical expressions involving whole numbers, decimals, fractions, and integers.

Rationale: The use of multiple operations together can be a difficult concept for learners of all ages. Therefore, the outcome of this competency depends on the student's ability to use the correct order of operations and get the correct answer. The knowledge of applying the correct order of operations on a mathematical expression is a very essential skill for mathematical fluency. Prior to this, students have used either single or two operations together using whole numbers only. Here, students will learn to use multiple operations on integers, decimal and fractional numbers. The order of operations or the BODMAS rule teaches students to follow the correct order to ensure accurate calculations. By mastering this concept, students learn to solve multi-step problems that allow them to further solve more complex algebraic calculations in the future.

Students have already used addition, subtraction, multiplication and division as independent operations. The skills of operations will now follow a particular pattern that the students are required to use. The pattern requires brackets to be solved first, followed by order/exponent, division, multiplication, addition and later subtraction. Using examples from the book along with exercise and worksheet practice helps students master the skill of order of operations.

Stimulus: This competency requires ample practice to master it. Use multiple examples from the textbook to apply BODMAS on integers, decimal numbers and fractional numbers. While solving, ask the students to solve the operations within the brackets. If there are multiple brackets, ask the students to solve vinculum first which is a horizontal bar above the numbers. If there is a lack of vinculum, solve the parentheses also known as round brackets. Next, solve the expression within the braces or curly brackets, followed by square brackets. Once all the brackets are solved, solve the division expressions followed by multiplications, addition and finally subtraction. This method of BODMAS makes complex mathematical problems easier.

Word problems have always been a difficult area of learning at all age levels. To overcome the language barrier to understanding word-problems, first write the problem on the board clearly and with the help of small questions, gather all the information given about the problem. Help students identify which operation to use by recognising key terms. Use them according to the given situation to find the solution to the problem.

باب ۳

ریاضیاتی عوامل کی ترتیب

قابلیت ۱

- حسابی عوامل میں ترتیب کے تصور کو پہچاننا بشمول مکمل اعداد اعشاریہ، کسور اور صحیح اعداد اور ریاضی کے سوالات کو حل کرنے میں ان کا استعمال کرنا۔

استدلال: کئی عوامل کو ایک ساتھ استعمال کرنا ہر عمر میں سیکھنے کے لیے مشکل رہا ہے لہٰذا اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کی حسابی عوامل کو درست ترتیب میں استعمال کرکے درست جواب حاصل کرنے کی صلاحیت پر منحصر ہے۔ ریاضی کے ہر عمل کی درست ترتیب کو لاگو کرنے کا علم اور اطلاق حسابی روانی کے لیے ایک بے حد ضروری مہارت (skill) ہے۔طلبہ نے اس سے پہلے مکمل اعداد کے لیے کسی ایک یا دو عوامل کو استعمال کیا ہے۔لیکن اب وہ یہاں integers،decimal اور fractional numbers کے لیے کئی حسابی عوامل کو استعمال کرنا سیکھیں گے۔حسابی عوامل کی ترتیب یا BODMAS طلبہ کو حسابی عوامل کو درست ترتیب میں استعمال کرکے بالکل صحیح جواب کے حصول کو یقینی بناتے ہیں اگر طلبہ اس تصور پر عبور حاصل کرلیں تو وہ کئی مرحلوں والے عبارتی سوالوں کو بہ آسانی حل کرسکیں گے اور مستقبل میں الجبرے کی مزید پیچیدہ calculations کو کرنے کے قابل ہو جائیں گے۔

طلبہ پہلے بھی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کو بطور علیحدہ علیحدہ عوامل کے استعمال کرچکے ہیں۔ اب وہ ان ہی عوامل کی مہارتوں کو ایک خاص ترتیب میں انجام دیں گے۔جس میں سب سے پہلے بریکٹ کو حل کیا جاتا ہے اس کے بعد بالترتیب 'of' یعنی ضرب پھر تقسیم پھر جمع اور آخر میں نفی کا عمل کیا جاتا ہے۔ درسی کتاب کی مشقوں اور ساتھ دی گئی ورک شیٹوں کا استعمال طلبہ کو اس مہارت پر عبور حاصل کرنے میں مدد فراہم کرے گا۔

محرک: طلبہ میں اس قابلیت کی مہارت پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے کہ انھیں زیادہ سے زیادہ مشق کروائی جائے۔ درسی کتاب میں دی گئی ایسی مثالوں کا استعمال کریں جن میں BODMAS کو صحیح اعداد، اعشاری اعداد اور کسری اعداد پر لاگو کیا جا سکے۔ دورانِ حل، طلبہ سے ان عوامل کو ترتیب کے ساتھ حل کروائیے جیسے بریکٹس اگر ایک سے زیادہ بریکٹ لگے ہوں تو طلبہ سب سے پہلے اعداد پر اُفقی لکیر (جو اعداد کے اوپر ایک اُفقی بار ہے) حل کرنے کے لیے کہیں اگر Bar Bracket نہیں ہے تو قوسین جسے (round bracket) بھی کہتے ہیں حل کروائیے۔ پھر خطوط وحدانی (curly brackets) حل کروائیے اس کے بعد (square bracket) حل کرنے کی باری ہے۔ ایک بار جب تمام بریکٹس حل ہو جائیں تو پھر تقسیمی اظہاریے (division expression) کو حل کرنا ہوگا اس کے بعد ضربی عمل پھر جمع ہوگا اور سب سے آخر میں گھٹانے کا عمل کیا جائے گا۔ BODMAS کا طریقہ ریاضی کے مشکل سوالات کو آسان بناتا ہے۔

ریاضی کے عبارتی سوالات کو حل کرنا طلبہ کو ہمیشہ سے مشکل لگتا ہے۔ لہٰذا عبارتی سوالوں کو سمجھنے کے لیے زبان کی رکاوٹوں کو ختم کیجیے اس کے لیے بورڈ پر عبارتی سوال کو لکھ دیجیے اور پھر طلبہ سے مختصر سوالات کرکے متعلقہ معلومات کو اکٹھا کیجیے تاکہ عبارتی سوال کے مفہوم کو وہ پہلے بہ آسانی سمجھ لیں پھر ان سے پوچھیے کہ اسے حل کرنے کے لیے کون سے حسابی عمل کا اطلاق ہوگا پھر سوال حل کرنے میں طلبہ کی مدد کیجیے۔

Unit 4

Multiples and Factors

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Identify factors of numbers up to 3 digits and multiples of numbers up to 2 digits.

Rationale: The outcome of this competency depends on the prior knowledge of students to carry out basic multiplication and division. Since factors are numbers which divide another number completely, leaving no remainder, students can use this knowledge to recognise them. Similarly, students can use prior knowledge of multiplication tables or repeated addition to find the multiples of a number. This competency helps students build a sense of numbers and allows them to be prepared for more complex mathematical problems and concepts. Exceling factors set the stage to understanding prime numbers and divisibility rules while multiples help to understand recognition of patterns and skills such as least common multiples (LCM) and highest common factors (HCF).

Stimulus: Begin the lesson with a starter activity that revisits their prior knowledge. Write a number, such as 36 on the board and ask the students to think of different ways they can use multiplication to get product 36. Write the response of the students on the board, such as 1×36, 2×18, 3×12, 4×9, etc. Once all the responses are received, ask them what all these pairs of numbers have in common. Inform them that these are all the numbers that can exactly divide 36 without leaving any remainder, thus introducing them to what factors are. Let them know that the factor of a number will always be smaller than or equal to the number itself. For example, 24 cannot be a factor of 12. Emphasise that 1 is the factor of all numbers. So, when factor of any number, the first factor will always be 1. Once they figure out what factors are, ask them what the answer would be if we multiply the number 8 with 1, 2, 3, 4, 5, and so on. Lead them to what multiples are. Once they understand, revise with the students the definitions of factors and multiples to avoid any confusion. Let them know that while factors of a number are limited or finite, multiples of a number are infinite or unlimited.

Once the students are clear on the difference between factors and multiples, recall what prime and composite numbers are. Both prime and composite numbers have infinite multiples, but prime numbers only have two factors, 1 and the number itself while composite numbers have more than two factors. Emphasise to the students that 1 is neither a prime nor a composite number. This is because 1 is only a factor of itself.

Competency 2

- Identify prime factors of numbers up to 4 digits and express them in index notation.
- Identify base and exponent and express numbers given in expanded form in index notation and vice versa.

Stimulus: Students have prior knowledge regarding what factors and multiples are. In this

اجزائے ضربی اور اضعاف

قابلیت ۱

- 3 ہندسوں تک والے اعداد کے factors اور 2 ہندسوں تک والے اعداد کے اضعاف (multiples) کو شناخت کر سکیں۔

استدلال: اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کی ضرب اور تقسیم کے سوالات کو حل کرنے کی پیشگی صلاحیت پر انحصار کرتا ہے۔ factor وہ اعداد ہیں جو دیے گئے عدد کو مکمل تقسیم کر سکتے ہیں اور کوئی remainder بھی نہیں بچتا۔ لہٰذا طلبہ اس معلومات کی بنیاد پر انھیں پہچان سکتے ہیں۔ اسی طرح طلبہ کسی عدد کے multiples کو معلوم کرنے کے لیے پہاڑے (multiplication tables) یا repeated addition کی سابقہ معلومات کو استعمال کر سکتے ہیں یہ قابلیت طلبہ کو اعداد کو سمجھنے اور ریاضی کے پیچیدہ سوالات اور تصورات کو سمجھنے میں مدد دیتی ہے۔

factors میں مہارت طلبہ کو مفرد اعداد (prime numbers) یا تقسیم پذیری کے اصول (divisiblity rules) کو سمجھنے میں مدد دیتی ہے جبکہ multiples نمونوں اور ایسی مہارتوں جیسا کہ وہ least common multiples (LCM) اور highest common factors (HCF) کو سمجھنے کے قابل بناتے ہیں۔

محرک: سبق کا آغاز ایک ایسی سرگرمی سے کیجیے جو ان کی سابقہ معلومات کو دہرانے میں مدد دے۔ اس کے لیے بورڈ پر ایک عدد لکھیے مثلاً 36 اب طلبہ سے پوچھیے کہ ان کے خیال میں ضرب کے وہ کون سے طریقے ہو سکتے ہیں جن کی مدد سے جواب 36 آئے۔ طلبہ کے جوابات بورڈ پر لکھتے جائیے جیسے 36 × 1، 18 × 2، 12 × 3، 9 × 4، وغیرہ۔ تمام جوابات ملنے کے بعد طلبہ سے پوچھیے کہ اعداد کے ان جوڑوں (pairs) میں کیا خاصیت مشترک ہے۔ انھیں بتائیے کہ یہ تمام اعداد 36 کو اس طرح مکمل طور پر تقسیم کرتے ہیں کہ کوئی بقیہ (remainder) نہیں بچتا۔ اس مرحلے پر آپ اجزائے ضربی (factors) کو متعارف کروائیے اور بتائیے کہ کسی عدد کے factors ہمیشہ اس عدد سے چھوٹے یا برابر ہوں گے۔ مثال کے طور پر 24 کا عدد 12 کا جزو ضربی (factors) نہیں ہوسکتا۔ اس بات کو زور دیتے ہوئے سمجھائیے کہ 1 ایک ایسا عدد ہے جو تمام اعداد کا factors یعنی جزو ضربی ہے، لہٰذا کسی بھی عدد کا پہلا factor ہمیشہ 1 ہو گا۔ ایک بار جب طلبہ جزو ضربی (factors) کو جان لیں تو ان سے پوچھیے کہ اگر ہم 9 کے عدد کو 1، 2، 3، 4، 5 وغیرہ سے ضرب دیں تو جواب کیا ہو گا۔ multiples کیا ہیں اس ضمن میں ان کی رہنمائی کیجیے۔ ابہام سے بچنے کے لیے ضروری ہے ایک بار پھر طلبہ کو factors اور multiples کی تعریف بتا دی جائے۔ انھیں بتائیے کہ اگر کسی عدد کے factors محدود (finite) ہوں تو اس عدد کے اضعاف multiples لامحدود (infinite) ہوتے ہیں۔

طلبہ جب factors اور multiples کے درمیان فرق کو واضح طور پر سمجھ لیں تو انھیں یاد دلائیے کہ مفرد (prime) اور مرکب (composite) اعداد کیا ہیں۔ دونوں طرح کے اعداد کے infinite multiple ہوتے ہیں لیکن مفرد اعداد کے صرف دو فیکٹرز ہوتے ہیں یعنی 1 اور ایک خود وہ عدد جب کہ مرکب اعداد کے دو سے زیادہ فیکٹرز ہوتے ہیں۔ اس نکتے پر زور دیجیے کہ 1 نہ تو مفرد ہے اور نہ ہی کوئی مرکب عدد اس کی وجہ 1 کا خود ایک فیکٹرز ہونا ہے۔

قابلیت ۲

- 4 ہندسی اعداد تک کے prime factors کو معلوم کر کے انھیں index notation میں لکھ سکیں۔
- Base اور exponent کو شناخت کر سکیں اور اعداد کو expended form یا اس کے برعکس Index notation میں لکھ سکیں۔

محرک: طلبہ پہلے ہی سے جانتے ہیں کہ اجزائے ضربی (factors) اور multiples کیا ہوتے ہیں۔ اس قابلیت میں وہ اپنی سابقہ معلومات کو استعمال کرتے ہوئے عدد کی prime factorization کرنا سیکھیں گے۔ سبق کا آغاز اس وضاحت سے کیجیے کہ ہر عدد prime factors پر مشتمل

competency, they will learn how to apply their knowledge to perform prime factorization. Begin the lesson by explaining that each number is made up of prime numbers. Breaking down a number into its prime factors is called prime factorization. Therefore, it can be said that every number is a product of its prime factors.

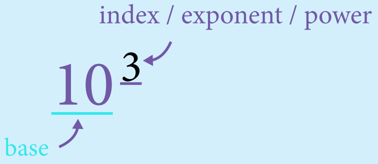
It can be troublesome to perform long division for every number. Hence, divisibility rules are used to determine whether a number can be divided by a prime number or not. It is a quick and efficient alternative to long divisions. Divisibility rules quicken the process of prime factorization. For example, knowing that any number that ends with 0 is divisible by 2, 5, and 10 allows students to draw the factor tree more efficiently.

The following cheat sheet can be used to revise all the divisibility rules at a glance.

Number	Divisibility rule applies if
2	its last digit is even (0, 2, 4, 6, or 8)
3	the sum of its digits is divisible by 3
4	the last two digits form a number divisible by 4
5	it ends in 0 or 5
7	the result of the last digit is, doubled and subtracted from the rest, is divisible by 7
10	it ends in 0
11	the result, of alternate digits is subtracted and added, is divisible by 11

Use examples from the book or independent worksheets to help the students practice divisibility rules.

Move on to using the divisibility rules to perform prime factorization. Write a 2-digit number, such as 64 on the board. Ask the students to find the factors of 66 that are only prime number. They may do so by either drawing the factor tree or division ladder. Prime factorization always starts with the smallest prime number, which is 2. The prime factorization of 64 is 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2. The number 2 is multiplied six times. When repeatedly writing numbers, students may either miscount or forget a 2. Therefore, explain to the students that a simplified method of writing prime factorization of a number is index notation. It is a way of writing the number of times a number has been multiplied by itself. So, 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 as index notation is written as 26, where 2 is the base which tells us the number being multiplied, and 6 represents the number of times the base has been multiplied, known as index or power.



ہوتا ہے۔ کسی عدد کو اس کے prime factors میں تقسیم کرنے کے عمل کو prime factorization کہتے ہیں۔ اس بات کو یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ ہر عدد اپنے prime factors کی product ہے۔

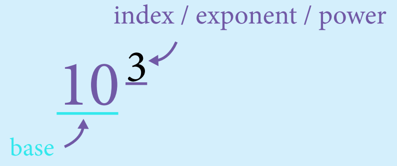
ہر عدد کے لیے لمبی تقسیم کرنا مشکل ہوسکتا ہے، لہٰذا یہ جاننے کے لیے آیا کسی عدد کو مفرد عدد (prime number) سے تقسیم کیا جا سکتا ہے یا نہیں ہم تقسیم پذیری کے اصول و قواعد کا استعمال کرتے ہیں۔ یہ طویل تقسیم کا ایک مؤثر متبادل ہے۔ تقسیم پذیری کے اصول مفرد عمل تجزی (prime factorization) کے عمل کو تیز بناتے ہیں مثلاً یہ جاننا کہ صفر '0' پر ختم ہونے والا کوئی بھی عدد 2، 5، اور 10 سے تقسیم ہو جاتا ہے۔ طلبہ سے factor tree کو draw کروائیے۔

مندرجہ ذیل چیک شیٹ یا جدول کو ایک نظر میں تقسیم پذیری کے تمام اصولوں کو دہرانے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے:

Divisibility rule applies: تقسیم پذیری کے اصول قابلِ اطلاق ہے اگر	عدد (Number)
(0, 2, 4, 6, or 8) اس کا آخری ہندسہ جفت (even) ہے۔	2
اس کے ہندسوں کا مجموعہ 3 پر قابلِ تقسیم ہے۔	3
آخری دو ہندسے مل کر ایسا عدد بنائیں جو 4 پر قابلِ تقسیم ہو۔	4
یہ 0 یا 5 پر ختم ہوتا ہے۔	5
کسی عدد کے آخری ہندسے کو دوگنا کر کے باقی عدد سے گھٹا دیا جائے، اور نتیجہ 7 پر تقسیم پذیر ہو تو اصل عدد بھی 7 پر قابلِ تقسیم ہو گا۔	7
یہ 0 پر ختم ہوتا ہے۔	10
متبادل ہندسوں کے مجموعوں کا فرق۔ '0' یا 11 پر تقسیم پذیر ہو گا۔	11

طلبہ کو تقسیم پذیری کے اصول کی مشق کروانے کے لیے کتاب سے یا استاد اپنی تیار کردہ ورک شیٹ کا استعمال کریں۔

تقسیم پذیری کے اصولوں کا اطلاق یا استعمال کرتے ہوئے مفرد عمل تجزی (prime factorization) کو کرواتے جائیے۔ بورڈ پر ایک دو ہندسی عدد لکھیے جیسے کہ 64۔ اب طلبہ سے کہیں وہ 64 کے ایسے اجزائے ضربی (factors) تلاش کریں کہ جو صرف مفرد اعداد (prime numbers) ہوں اس کام کو وہ factor tree یا تقسیم کی سیڑھی بنا کر بھی کر سکتے ہیں۔ مفرد عمل تجزی یا prime factorization ہمیشہ سب سے چھوٹے مفرد عدد سے شروع کی جاتی ہے جو کہ 2 ہے۔ اس لحاظ سے 64 کی prime factorization ہو گی۔ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ یعنی 2 کو لگاتار 6 بار ضرب دی جائے گی۔ طلبہ جب کسی عدد کو کئی بار لکھتے ہیں تو بعض اوقات وہ غلطی سے ایک بار 2 کو چھوڑ دیتے ہیں یا پھر اسے گنتے ہوئے غلطی کر دیتے ہیں۔ لہٰذا طلبہ کو سمجھائیے کہ کسی عدد کی prime factorization کو لکھنے کا ایک آسان طریقہ Index notation کا ہے جس سے پتہ چلتا ہے کہ کوئی عدد کتنی بار خود سے ضرب دیا گیا ہے۔ اس لیے $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ کو index notation میں یوں لکھا جاتا ہے: 2^6 یہاں '2' base ہے یعنی وہ عدد جسے ضرب دی جا رہی ہے اور '6' طاقت (power) ہے جو ظاہر کرتی ہے کہ عدد یعنی base کو کتنی مرتبہ ضرب دیا گیا ہے۔



Let's consider the primer factorization of 15, that is 3 × 5. Since both 3 and 5 are only multiplied once, it will remain as it is. Once the students grasp the idea, ask them to find the prime factorization of 272 and write it as index notation. Similarly, ask them to write 38 in expanded form.

Using the examples and exercises from the textbook, strengthen the student's concept as it will help them achieve mastery in the next competency.

Competency 3

- Find HCF and LCM of two or three numbers (up to 3 digits) using:
  - Prime factorization
  - Division method
- Solve real-life word problems involving HCF and LCM
- Recognise and calculate square numbers up to 2 digits

Stimulus: This competency depends on the students' mastery of the earlier competency. Begin the lesson with the revision of the terms 'factors' and 'multiples'. You may do so by asking the students to enlist the factors of 32 or the multiples of 8. Once revision has been done, move on to introducing them to the term 'highest common factor'. Ask them what they think it means. Once you've gathered their response, move on to factorizing numbers with common factors, such as 12 and 24, 36 and 72. Write the numbers on board and ask the students to prime factorise them. They may do so using factor tree or division ladder. Once they've done so, have them list all the factors and pick out the common ones.

For example: the prime factors of 12 are 2 × 2 × 3 and the prime factors of 24 are 2 × 2 × 2 × 2 × 3. The common factors of 12 and 24 are thus 2 × 2 × 3, making 12 the highest common factor of 12 and 24. The HCF or highest common factor is the product of the common factors of two or more numbers.

Let the students know that there are two methods of finding HCF, that is the listing method and the long division method. The listing method uses prime factorization, whereas the long division method is a little different. To carry out a long division method for two numbers, such as 186 and 252, divide the greater number by the smaller number that is 252 ÷ 186. The remainder, 66 in this case becomes the divisor to divide 186. The remainder again becomes the divisor, which is 54 and the previous remainder, 66, becomes the dividend. Repeat the process until the remainder is 0. The last divisor is the HCF of two numbers.

آیئے 15 کے prime factorization پر غور کریں یعنی 3 × 5 کیونکہ 3 اور 5 دونوں کو صرف ایک بار ضرب دیا گیا ہے، لہٰذا یہ اسی شکل میں رہیں گے۔ ایک بار جب طلبہ اس تصور کو سمجھ لیں تو ان سے 272 کی prime factorization بنانے اور اسے index notification کے طور پر لکھنے کے لیے کہیے ان سے کہیں کہ اسی طرح 3^8 کو expended form میں لکھیے۔

درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کا استعمال کرتے ہوئے طلبہ کے اس تصور کو پختہ کیجیے کیونکہ یہ انھیں اگلی قابلیت میں مہارت حاصل کرنے میں مدد دے گا۔

قابلیت ۳

- تین ہندسی اعداد تک کے دو سے تین اعداد کا عاداعظم HCF اور ذواضعافِ اقل (LCM) مندرجہ ذیل طریقوں سے معلوم کرسکیں:
  - prime factorization
  - تقسیم کا طریقہ (Division method)
- حقیقی زندگی سے جڑے HCF اور LCM والے عبارتی سوالات کو حل کریں۔
- 2 ہندسی مربع اعداد (square number) کو جان سکیں اور ان کے حسابی عمل کو انجام دے سکیں۔

محرک: اس قابلیت کا انحصار طلبہ کی سابقہ قابلیت میں مہارت پر ہے۔ factors اور multiples کی اصطلاحات کی دہرائی یا اعادے کے ساتھ سبق کا آغاز کیجیے۔ جیسے کہ طلبہ سے کہیں کہ 32 کے factors اجزائے ضربی اور 8 کے multiples کو درج کیجیے۔ جب اعادہ مکمل ہو جائے تو طلبہ کو عاداعظم 'Highest common factor' کی اصطلاح سے متعارف کرائیے اور ان سے پوچھیے کہ ان کے خیال میں اس کا کیا مطلب ہے۔ ان کے جوابات سننے کے بعد ان کو اعداد کی اجزائے ضربی factorization ان کے مشترک اجزائے ضربی (common factors) کے ساتھ متعارف کروائیے جیسے 12 اور 24، 36 اور 72 وغیرہ۔ بورڈ پر اعداد کو لکھیے اور طلبہ سے ان کی مفرد عمل تجزی (prime factorization) کرنے کے لیے کہیں۔ اس کے لیے وہ factor tree اور divison ladder کا استعمال کر سکتے ہیں۔ جب وہ یہ کام کر چکیں تو ان سے کہیے کہ تمام factors کو لکھیے اور ان میں سے مشترک کو الگ کیجیے۔

مثال کے طور پر: 12 کی مفرد اجزائے ضربی 3 × 2 × 2 ہیں اور 24 کی مفرد تجزیاں 3 × 2 × 2 × 2 ہوں گی۔ جبکہ 12 اور 24 کا عاداعظم highest common factors ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ HCF یا مشترک عاداعظم (highest common factor) وہ عدد ہے جو دو یا زیادہ اعداد کے مشترک اجزائے ضربی (common factors) کے حاصل ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔

طلبہ کو بتائیے کہ HCF کو دو طریقوں سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ ایک طریقہ factorization method اور دوسرا طریقہ division method کہلاتا ہے۔ factorization method میں عام طور پر مفرد عمل تجزی (prime factorization) کو استعمال کیا جاتا ہے۔ جب کہ division method قدرے مختلف ہے۔ اگر دو اعداد 186 اور 252 ہوں تو division method میں بڑے عدد کو چھوٹے عدد سے تقسیم کیجیے: 186 ÷ 252 اس کے نتیجے میں remainder 66 آئے گا۔ اب 186 کو 66 سے تقسیم کیجیے۔ اس نئے remainder کو اگلے مرحلے میں تقسیم کار کے طور پر استعمال کرتے رہیں۔ یہاں تک بقیہ remainder صفر 0 ہوجائے اس عمل کے آخری تقسیم کار کو HCF کہا جاتا ہے۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 186\overline{)252} \\ -\underline{186} \\ 66 \end{array} \text{ (remainder)}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 66\overline{)186} \\ -\underline{132} \\ 54 \end{array} \text{ (remainder)}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 54\overline{)66} \\ -\underline{54} \\ 12 \end{array} \text{ (remainder)}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 12\overline{)54} \\ -\underline{48} \\ 6 \end{array} \text{ (remainder)}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 6\overline{)12} \\ -\underline{12} \\ 0 \end{array} \text{ (remainder)}$$

Hence, HCF of 186 and 252 is 6.

In case of finding HCF of more than two numbers, select any two numbers and make the smaller number the divisor and the greater number the dividend. The HCF of the two numbers will then become the dividend of the third number. The HCF of the third number will be the HCF of all three numbers. It is likely that student may make mistakes when doing HCF – one of which is that they may start dividing the number with a composite number such as 4 rather than a prime number that is 2. Therefore, ample practice needs to be done to strengthen the students' skills.

Once the students have mastered HCF, move on to LCM. Explain to the students that LCM is the least common multiple, that is it is the smallest multiple of both the numbers. LCM can be obtained using either prime factorization or division method. Let's take 8 and 12 for example. Using prime factorization, break each number into its prime factors, which is $8 = 2 \times 2 \times 2$ and $12 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$. Now, to find the LCM, multiple common and uncommon factors, which is $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$. Therefore, 24 is the smallest common multiple of 8 and 12.

Division method of LCM is a little different from the division method to find HCF. Numbers are written on the division ladder and are divided by a common prime factor. The numbers are divided by prime numbers until all the numbers in the rows are 1. Now multiply all prime factors to get LCM. Tell the students that HCF and LCM are related in such a way that the product of two numbers will be equal to the product of their HCF and LCM. $\boxed{N1 \times N2 = LCM \times HCF}$

Once the concept of LCM and HCF is clear amongst the students, move on to explaining to them what square numbers are. This competency will require them to revisit the competency of Index notations as square numbers are essentially written as index notation. You may also choose to teach them this topic when you're teaching them about index notations. Use examples and exercises from the textbook to help them master their skills.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 186\overline{)252} \\ -\underline{186} \\ 66 \end{array}\ \text{(remainder)}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 66\overline{)186} \\ -\underline{132} \\ 54 \end{array}\ \text{(remainder)}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 54\overline{)\ 66} \\ -\underline{54} \\ 12 \end{array}\ \text{(remainder)}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 12\overline{)\ 54} \\ -\underline{48} \\ 6 \end{array}\ \text{(remainder)}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 6\overline{)\ 12} \\ -\underline{12} \\ 0 \end{array}\ \text{(remainder)}$$

لہٰذا 186 اور 252 کا HCF 6 ہے

دو سے زیادہ اعداد کا HCF معلوم کرنے کے لیے کوئی سے دو عدد منتخب کیجیے اور سب سے چھوٹے عدد کو تقسیم کنندہ (divisor) اور بڑے عدد کو dividend بنائیں ان دونوں اعداد کا HCF پھر تیسرے عدد کا dividend بن جائے گا۔ تیسرے عدد کا HCF تینوں اعداد کا HCF ہو گا۔عموماً طلبہ HCF معلوم کرتے وقت غلطیاں کر سکتے ہیں۔جس میں سے ایک یہ ہے کہ وہ عدد کو 2 کے بجائے کسی مرکب عدد composit number جیسے 4 سے تقسیم شروع کر سکتے ہیں اس لیے طلبہ کی مہارت کو پختہ کرنے کے لیے انھیں زیادہ مشق کروائیے۔

ایک بار طلبہ HCF میں مہارت حاصل کرلیں تو انھیں LCM پر لے آئیں طلبہ کو سمجھائیے کہ LCM یا least common multiple سے مراد کم سے کم مشترکہ ضرب ہے یعنی وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد جو متعلقہ اعداد پر تقسیم ہو سکے۔ LCM کو نکالنے کے دو طریقے ہیں: پہلے طریقے میں prime factorization (اعداد کو سادہ اجزائے ضربی میں تقسیم کرنا) یا تقسیم کا طریقہ مثال کے طور پر 8 اور 12 دو اعداد کو لیتے ہیں اور prime factorization کا استعمال کرتے ہوئے ہر ایک عدد کو اس کے مفرد اجزائے ضربی میں توڑ دیجیے یعنی $8 = 2 \times 2 \times 2$ اور $12 = 3 \times 2 \times 2$، اب LCM نکالنے کے لیے تمام مشترک اور غیر مشترک اجزائے ضربی کو ضرب دیجیے یعنی $24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$، معلوم ہوا کہ 8 اور 12 کا LCM 24 ہے۔

LCM کا تقسیم کا طریقہ HCF تلاش کرنے کے طریقے سے تھوڑا مختلف ہے جس میں اعداد تقسیم کی سیڑھی Division Ladder پر لکھے جاتے ہیں اور ایک مشترکہ مفرد جزو ضربی common prime factor سے تقسیم کیے جاتے ہیں۔ اعداد کی تقسیم کا عمل اس وقت جاری رہتا ہے جب تک سطر یا قطار کے تمام اعداد 1 نہ بن جائیں۔ اب حاصل ہونے والے تمام مفرد اجزائے ضربی prime factors کو ضرب دے کر LCM حاصل کرلیں۔ طلبہ کو بتائیے کہ HCF اور LCM کا تعلق اس طرح ہے کہ یہ دو اعداد کا حاصل ضرب (product) ہے جو ان کے HCF اور LCM کے حاصل ضرب (product) کے برابر ہو گی۔ $\boxed{N1 \times N2 = LCM \times HCF}$

طلبہ LCM اور HCF کا تصور اچھی طرح سمجھ لیں تو انھیں مربع عدد (square number) سکھائیے اور بتائیے کہ یہ کیا ہیں۔ اس قابلیت کو سیکھنے کے لیے انھیں index notation کا تصور دہرانے کی ضرورت پڑے گی کیونکہ مربع اعداد بنیادی طور پر index notation کی شکل میں لکھے جاتے ہیں لہٰذا آپ یہ موضوع اس وقت بھی پڑھا سکتے ہیں جب آپ طلبہ کو index notation کے بارے میں پڑھا رہے ہوں۔ اس مہارت پر عبور حاصل کرنے کے لیے انھیں درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو کروائیے۔

Unit 5

Rate and Ratio

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Explain rate as a comparison of two quantities where one quantity is 1

Rationale: The outcome of this competency depends on the student's prior knowledge about division, multiplication, place values and fractions. Mastery in these skills help students in simplifying and interpreting ratios, while also solving real-world problems associated with rate. Understanding and gaining mastery in rates and ratio is essential for mathematical fluency. Learning the concepts of rate helps students grasp real-world contexts such as speed, cost, time, and efficiency, whereas rate helps students compare quantities for recipes, sports, statistics, and data. Moreover, continued ratio helps compare three or more quantities required for the fields of science, engineering, economics, etc. Start the topic by giving real-life examples of the use of rate and ratio and then slowly move on to building their strong foundations by ample practice.

Stimulus: Start the lesson by explaining the concept of rate as a special ratio in which the two terms or values are in different units. The word "per" denoted by a '/' (a forward slash) gives a clue that we are dealing with a rate. For example, if a 12-ounce can of corn costs Rs 85 the rate is Rs 85 for 12 ounces or Rs $\frac{85}{12}$ oz. Subsequently, explain to the students that a unit rate is a ratio that compares two related quantities in different units, and the second unit is 1 (meaning per). For example, if we say Asif types 60 words in a minute, then his rate of typing is 60 words per minute or 60 words/minute. Unit rate is basically calculated by simplifying the numerator and denominator until the denominator becomes 1. That is if a dozen eggs are sold for Rs 96, one egg will sell for $\frac{96}{12}$ = Rs 8. So, the rate of eff is Rs 8/egg.

Competency 2

- Calculate ratio of two numbers (up to 3 digits) and simplify ratios
- Explain and calculate continued ratio

Stimulus: Start the lesson by drawing two baskets on the board. One basket should contain 7 apples, and the other basket should have 14 bananas. Ask the students to compare the two baskets. What is the difference in the number of fruits in each basket? Ask the students how they can compare the number of apples to the number of bananas in both baskets. How many less are the apples as compared to the bananas. Lead them to the definition of ratio which is a method of comparing two or more quantities. It tells us how much more or less one quantity is from the other. Tell them that the ratio of the number of apples to the number of bananas is 7 is to 14, which is also written as 7 : 14. Similarly, the ratio of the number of bananas to the number of apples is 14 : 7. Students often tend to make the mistake of writing ratio in the correct order, for example writing ratio of bananas

باب
۵

شرح اور نسبت

قابلیت ۱

وضاحت کر سکیں کہ دو مقداروں کا موازنہ ہے جن میں ایک مقدار ایک کے برابر ہو۔

استدلال: اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کی سابقہ معلومات یا علم پر منحصر ہے جیسے تقسیم، ضرب، مقامی قیمت اور کسور۔ ان مہارتوں پر عبور حاصل کرنے سے طلبہ نہ صرف ratios کو بہ آسانی سمجھنے اور ان کی وضاحت کرنے کے قابل ہو جاتے ہیں بلکہ وہ حقیقی زندگی میں rate سے متعلقہ عبارتی سوالوں کو حل کرنا سیکھتے ہیں۔ حسابی عمل میں روانی کے لیے ضروری ہے کہ طلبہ نسبت (ratio) اور شرح (rate) کے تصورات کو سمجھیں اور اس میں مہارت حاصل کریں۔ Rate یعنی شرح کا تصور سیکھنے سے طلبہ کو زندگی کے سیاق سباق میں رفتار، لاگت، وقت اور کارکردگی کو سمجھنے میں آسانی ہوتی ہے۔ rate طلبہ کو تراکیب، کھیل، شماریات اور معلومات (Data) میں مقداروں کا موازنہ کرنے میں مدد فراہم کرتا ہے۔ مزید برآں مسلسل نسبت تین یا زائد مقداروں کا موازنہ کرنے میں مدد دیتا ہے جو سائنس، انجینئرنگ، معاشیات وغیرہ جیسے شعبوں کے لیے ضروری ہے۔ موضوع یا سبق کا آغاز حقیقی زندگی سے ایسی مثالیں پیش کرتے ہوئے کیجیے جن میں rate اور ratio کو استعمال کیا گیا ہو۔ سبق کی پھر رفتہ رفتہ مناسب مشق سے ان کے بنیادی تصور کو پختہ کریں۔

محرک: ابتدا میں شرح (rate) تصور کو ایسی دو مقداروں کی نسبت کے طور پر متعارف کروائیے جن کی اکائیاں مختلف ہوں۔

یہاں فی (per) کا لفظ '/' (جو ایک فارورڈ سلیش) یہ اشارہ کرتا ہے کہ ہم شرح یعنی rate کا مطالعہ کر رہے ہیں۔ مثال کے طور پر مکئی کا 12 اونس کا ایک ڈبا 85 روپے کا ہے۔ یعنی 12 اونس مکئی کی قیمت 85 روپے ہے حسابی طور پر اسے $\frac{85}{12}$ اونس بھی لکھ سکتے ہیں۔ مزید برآں طلبہ کو سمجھائیے کہ یونٹ کی شرح ایک نسبت (ratio) ہے جو ایسی دو مقداروں کا موازنہ کرتی ہے جن کی اکائیاں پیمائشی اکائیاں مختلف ہوں اور دوسری مقدار 1 کے برابر ہو۔ مثلاً اگر ہم کہتے ہیں کہ آصف ایک منٹ میں 60 الفاظ ٹائپ کرتا ہے تو اس کے ٹائپ کرنے کی رفتار 60 لفظ فی منٹ ہے۔ اکائی کی شرح کا حساب بنیادی طور پر شمار کنندہ (numerator) اور مخرج (denometor) کو اس وقت تک حل کرنا جب تک کہ مخرج (deneminator) 1 کے برابر نہ ہو جائے۔ اسی طرح اگر ایک درجن انڈوں کی قیمت 96 روپے ہے تو ایک انڈے کی قیمت $\frac{96}{12} = 8$ روپے۔ یعنی انڈوں کی شرح 8 روپے فی انڈا ہے۔

قابلیت ۲

- دو اعداد (جو زیادہ سے زیادہ تین ہندسوں پر مشتمل ہوں) کی نسبت (ratios) نکالیں اور اس کو سادہ ترین شکل میں لکھیں۔
- مسلسل تناسب کی وضاحت کریں اور اس کا حساب لگائیں۔

محرک: سبق کا آغاز بورڈ پر دو ٹوکریاں بنا کر کیجیے جن میں سے ایک میں 7 سیب اور دوسری میں 14 کیلے رکھے دکھائی دیں۔ اب طلبہ سے پوچھیے کہ دونوں ٹوکریوں کا موازنہ کیجیے اور بتائیے کہ ان میں رکھے پھلوں کی تعداد کتنی ہے؟ طلبہ سے پوچھیے کہ وہ دونوں ٹوکریوں میں موجود کیلوں اور سیبوں کی تعداد کا موازنہ کس طرح کریں گے۔ کیلوں کے مقابلے میں سیب کتنے کم ہیں؟ یہ سوال کرتے ہوئے انھیں نسبت کی تعریف کی طرف متوجہ کیجیے اور بتائیے کہ نسبت دراصل دو یا زیادہ مقداروں کا موازنہ کرنے کا طریقہ ہے جس سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ ایک مقدار دوسری سے کتنی زیادہ یا کم ہے۔ انھیں بتائیے کہ سیب کی تعداد اور کیلے کی تعداد کی نسبت (ratio) 7 بمقابلہ 14 ہے، جسے حسابی طور پر 7 : 14 لکھا جاتا ہے۔ اسی

to apples instead of apples to bananas. Therefore, it is very essential to lay emphasis on writing the ratio in the correct order.

Let the students know that ratios can also be expressed as fraction. The first quantity, also known as antecedent, becomes the numerator while the second quantity, also known as consequent, becomes the denominator. So, 7 : 14 can be expressed as $\frac{7}{14}$. Just like how fractions are simplified to their lowest term, so can the ratios. However, make it clear to the students that fractions and ratios are different. While all ratios can be expressed as fractions, not all fractions can be expressed as ratios. Move to explaining the students how ratios are simplified – by dividing both the numbers to their common factor. So 7 : 14 is simplified to 1 : 2. This means that for every apple, there are 2 bananas. Point out to the students that since ratio is comparison, it does not have any unit.

Using examples from the book, explain how continued ratio is calculated. Independent worksheets with real life context should also be given to further strengthen their skills and concept.

طرح کیلوں اور سیبوں کا ratio 14 : 7 ہے۔ طلبہ اکثر ratio کو صحیح ترتیب میں لکھتے ہوئے غلطی کرتے ہیں۔ اس لیے ضروری ہے کہ ratio کو دُرست ترتیب میں لکھنے پر زور دیا جائے۔

طلبہ کو بتائیے کہ نسبت (ratio) کو کسر (fraction) کے طور پر بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ پہلی مقدار جسے مقدم (Antecedent) کہا جاتا ہے شمار کنندہ (numerator) بنتی ہے جب کہ دوسری مقدار، جسے مؤخر (consequent) کہا جاتا ہے مخرج (Denomenetor) بنتی ہے لہٰذا 7 : 14 کو $\frac{7}{14}$ کے طور پر بھی لکھا جا سکتا ہے۔ بالکل اسی طرح جیسے کسر (fraction) کو اس کی سادہ ترین شکل میں مختصر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح ratio کو بھی سادہ بنایا جا سکتا ہے۔ تاہم اس مرحلے پر طلبہ کو یہ ضرور بتائیے کہ کسر اور نسبت دو مختلف چیزیں ہیں تمام نسبتوں کو ہم کسور کی شکل میں لکھ سکتے ہیں لیکن تمام کسور (fractions) کو نسبت کے طور پر ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ اب طلبہ کو سمجھائیے کہ نسبت کو کس طرح سادہ ترین شکل میں لایا جاتا ہے۔ دونوں عددی مقداروں کو ان کے common factor سے divide کر کے یعنی 14 : 7 کو 7 سے تقسیم کیا جائے تو تناسب کی سادہ ترین شکل ملتی ہے یعنی 2 : 1 اس کا مطلب ہے کہ ہر سیب کے لیے 2 کیلے ہیں طلبہ کو بتائیے کہ ratio دراصل موازنہ ہے لہٰذا اس کی کوئی اکائی (unit) نہیں ہے۔

اس کام کے لیے ایسی ورک شیٹس بھی استعمال کی جا سکتی ہیں جن میں روزمرّہ یا حقیقی زندگی سے متعلقہ سوالوں اور مثالوں کو استعمال کر کے طلبہ کے اذہان میں موجود تصور کو مزید پختہ کیا جا سکے۔

Unit 6
Percentage

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Express one quantity as a percentage of another and compare two quantities by percentage.

Rationale: This competency depends on the students' prior knowledge of percentage being special kinds of fractions that have the denominator 100. Students must also know how to express percentages as fractions and decimals. This year, students will learn to express one quantity as a percentage or another and will be able to successfully compare two quantities by their percentages. Understanding and excelling the learning objectives related to percentages is fundamental for financial literacy and making informed decisions. The use of percentages is in every field of life and its real-life applications include calculating taxes, discounts, population, making the learning of percentages highly relevant and engaging. Start the lesson by revising and recalling what the students have previously learnt in primary school. Once the students can successfully recall how to calculate percentages and interchange them as fractions and decimals, move on to explaining to them how to express one quantity as a percentage of another.

Stimulus: Begin the lesson with an activity for students to revisit their prior knowledge. Provide them with a 10×10 grid. Ask them to colour the squares such that there are majority of red squares and a small number of green squares. Once they've all coloured, ask them to count the red and green-coloured boxes and write them down. Now, ask them to express both the coloured boxes as fractions with the denominator 100.

Elaborate the following vocabulary with the students:

Per:	for one
cent:	hundred
percent:	for one hundred
percentage:	out of hundred

Point out to the students that 'per cent' means per hundred and that the symbol % represents percentage. Ask the students if they can convert the fractions for coloured boxes into fractions. If they are unable to do so, help them to divide the number of coloured boxes by 100. For example, if there are 85 red-coloured boxes, the fraction would be $\frac{85}{100}$ and the percentage of red-coloured boxes would be 85%.

Using the examples from the book, move on to explaining to the students how converting percentage into fractions requires them to change the percentage sign into the denominator 100 while keeping the number as the numerator. Similarly, when converting fractional percentage, such as $7\frac{1}{2}\%$ into fractions, the students would need to first convert the improper fraction into proper fraction ($\frac{15}{2}$) and then multiply it with the reciprocal of 100 ($\frac{15}{2} \times \frac{1}{100} = \frac{3}{40}$). To convert fractional percentage into

باب ۶ فی صد

قابلیت ۱

- طلبہ ایک مقدار کو دوسری مقدار کے فی صد (percentage) کے طور پر ظاہر کرنا اور دو مقداروں کا موازنہ بہ لحاظ فی صد کرسکیں۔

استدلال: یہ قابلیت طلبہ کی اس سابقہ معلومات پر منحصر ہے کہ فی صد ایک خاص قسم کی کسر (fraction) ہے جس کا مخرج (denominator) 100 ہے۔ اس کے ساتھ ساتھ طلبہ کو یہ بھی معلوم ہونا چاہیے کہ وہ فی صد کو کسر (fraction) اور اعشاریہ (decimal) میں کیسے لکھیں گے۔ اس سال، طلبہ یہ سیکھیں گے کہ کس طرح ایک مقدار کو دوسری مقدار (quantity) کے فی صد کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے اور دو مقداروں کا موازنہ فی صد میں کیسے کیا جاتا ہے: فی صد سے متعلق سیکھنے کے اہداف (objectives) کو سمجھنا، ان پر عبور حاصل کرنا، مالیاتی شعور اور دُرست فیصلے کرنے کے لیے نہایت اہم ہے، کیونکہ فی صد کا استعمال زندگی کے ہر شعبے میں ہوتا ہے۔ جن میں ٹیکس، رعایت، آبادی وغیرہ کا تخمینہ یا حساب لگانا شامل ہیں جو فی صد کو سیکھنے کے عمل کو نہایت دل چسپ اور اس کے تعلق کو روزمرّہ زندگی سے جوڑتا ہے۔

سبق کا آغاز طلبہ کی اس معلومات یا علم کو دہراتے ہوئے کیجیے جو انھوں نے پرائمری جماعتوں میں سیکھا تھا۔ جب طلبہ کامیابی کے ساتھ فی صد نکالنے اور اسے کسر (fractions) یا اعشاریہ (decimals) میں تبدیل کرنے کا عمل یاد کرلیں تو انھیں بتائیے کہ ایک مقدار کو دوسری کے فی صد کے طور پر کس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

محرک: سبق کے آغاز ایک سرگرمی سے کروائیے تاکہ طلبہ اپنی سابقہ معلومات کا اعادہ کرلیں۔ اس کے لیے طلبہ کو ایک 10 × 10 کی چوکھٹا (grid) فراہم کیجیے اور انھیں ہدایت دیجیے کہ وہ گرڈ کے خانوں میں اس طرح رنگ بھریں کہ زیادہ تر خانے سرخ ہوں سوائے چند خانوں کے جو سبز رنگ کے ہوں۔ جب طلبہ رنگ بھرلیں تو ان سے سرخ اور سبز خانوں کو گنوائیے اور پھر مقدار کو لکھوائیے۔ اب ان سے کہیے کہ وہ دونوں رنگوں کے خانوں کی تعداد کو مخرج (Denominator) 100 کے ساتھ کسر کی شکل میں لکھیں۔

مندرجہ ذیل الفاظ کی وضاحت بورڈ پر لکھ کر کیجیے:

فی / ایک کے لیے	:	per
صد / سو	:	cent
فی صد / ایک سو کے لیے	:	percent
فی صد / سو میں سے	:	percentage

طلبہ کو بتائیے کہ فی صد 'percent' کا مطلب ہے فی سو (یعنی ہر سو میں سے) اور یہ علامت % فی صد کو ظاہر کرتی ہے۔ اب طلبہ سے پوچھیے کہ کیا وہ رنگین خانوں کی تعداد کو کسور (fractions) میں تبدیل کرسکتے ہیں؟ اگر وہ ایسا نہ کرسکیں تو رنگین خانوں کی تعداد کو 100 سے تقسیم کرنے میں ان کی مدد کریں۔

مثال کے طور پر اگر 85 سرخ رنگ کے خانے ہیں تو کسر (fraction) $\frac{85}{100}$ ہوگی یوں سرخ رنگ کے خانوں کا فی صد 85% ہوگا۔

کتاب میں دی گئی مثالوں کو استعمال کر کے طلبہ کو یہ سمجھائیے کہ فی صد کو کسر (fraction) میں تبدیل کرنے کے لیے فی صد کی علامت (%) کو 100 کے Denominator میں بدلنا پڑتا ہے جب کہ عدد کو شمار کنندہ (numerator) کی جگہ رکھا جاتا ہے۔ اسی طرح جب کسی جزوی فی صد (fractional percentage) جیسے $7\frac{1}{2}\%$ کو کسر میں تبدیل کرنا ہو تب پہلے اس غیر واجب کسر (improper fraction) کو واجب کسر (proper fraction) یعنی $(\frac{15}{2})$ میں تبدیل کر کے اسے 100 کے ضربی معکوس (reciprocal) کو اعشاریہ (decimal) میں تبدیل

decimal, divide the number by 100 to have the answer in decimal. In case of improper fractions, first convert the improper fraction into proper fraction and simplify it before dividing it by 100.

Once the students are familiar with the concept of changing different percentages into fractions and decimals, use the following examples for their independent class practice:

- 17%
- 29%
- 74%
- 95%
- 60%
- $20\frac{1}{4}\%$
- $37\frac{1}{4}\%$
- $44\frac{1}{5}\%$

Once the students can independently convert percentages into fractions, move on to expressing a fraction as a percentage. This is comparatively easy as we only need to multiply the fraction or decimal by 100. For independent practice, use the following examples:

- $\frac{2}{5}$
- 1.67
- $\frac{40}{50}$
- 19.6
- $\frac{21}{4}$

Move on to explaining to the students that to find the percentage of a given quantity, convert the percentage into fractional form and then multiply by the total quantity. Let the students know that when finding the percentage of a quantity, the easy way to calculate is to replace 'of' from the question into a multiplication sign. For example, if the question asks to find 70 percent of 500, the 70% will convert to $\frac{70}{100}$ and the of will convert into the multiplication sign. The calculation will be: $\frac{70}{100} \times 500$.

Similarly, to express one quantity, for example a, as the percentage of the other quantity, for example *b*, dive a by b and multiply it by 100. That is, $\frac{a}{b} \times 100$. However, Students often make mistakes by using the wrong base value, that is they may calculate $\frac{b}{a} \times 100$. Therefore, it is necessary to emphasise identifying whole or original amount. Use examples and exercises from the textbook to strengthen the concept and its application.

Moreover, to compare two quantities, express both the quantities as percentages and then compare them. Point out to the students that 20% of 150 and 20% of 120 are different as the total amount is

کرنے کے لیے اسے 100 پر تقسیم کیا جاتا ہے تا کہ جواب اعشاریہ میں حاصل ہو جائے۔ اگر improper fractions ہو تو پہلے اسے proper fraction میں تبدیل کیا جاتا ہے اس کے بعد اسے 100 پر تقسیم کیا جاتا ہے۔

طلبہ جب مختلف فی صد (percentages) کو fractions اور decimals میں تبدیل کرنے کے تصور سے مانوس ہو جائیں تو مہارت کے لیے انھیں مندرجہ ذیل مثالوں کو اپنی نگرانی میں کروایئے:

- 17%
- 29%
- 74%
- 95%
- 60%
- $20\frac{1}{4}\%$
- $37\frac{1}{4}\%$
- $44\frac{1}{5}\%$

جب طلبہ اپنے طور پر فی صد کو کسر میں تبدیل کرنے لگیں تو ایک قدم آگے بڑھتے ہوئے کسر کو فی صد میں تبدیل کرنا بتایئے۔ یہ نسبتاً آسان ہے کیونکہ ہمیں صرف کسر یا اعشاریہ کو 100 سے ضرب دینا ہو گا۔ خود سے مشق کرنے کے لیے مندرجہ ذیل مثالوں کو استعمال کیجیے:

- $\frac{2}{5}$
- 1.67
- $\frac{40}{50}$
- 19.6
- $\frac{21}{4}$

طلبہ کو یہ سمجھایئے کہ کسی دی گئی مقدار کا فی صد معلوم کرنے کے لیے فی صد کو کسری شکل میں تبدیل کریں اور پھر اسے کل مقدار سے ضرب دیں طلبہ کو بتایئے کہ کسی مقدار کا فی صد نکالنے کا آسان طریقہ یہ ہے کہ سوال میں موجود 'of' 'کا' کو ضرب (×) کے نشان میں بدل دیں۔ جیسے اگر سوال ہو کہ 500 کا 70 فی صد (percent) معلوم کیجیے تو 70 فی صد کو $\frac{70}{100}$ میں تبدیل کرنا ہو گا اور 'کا' کو ضرب کے نشان سے بدلنا ہو گا یوں حساب کچھ اس شکل میں ہو گا۔ $\frac{70}{100} \times 500$

اسی طرح کسی ایک مقدار کو دوسری مقدار کا فی صد ظاہر کرنے کے لیے مثلاً اگر 'a' کو 'b' کا فی صد ظاہر کرنا ہو تو 'a' کو 'b' پر تقسیم کیجیے اور پھر 100 سے ضرب دے دیجیے یعنی حسابی شکل کچھ یوں ہو گی:

$$a \div b \times 100$$

تاہم طلبہ اکثر غلطی کرتے ہیں اور غلط بنیادی مقدار (base value) کا استعمال کرتے ہیں یعنی وہ $b \div a \times 100$ کا حساب لگا لیتے ہیں۔ اس لیے طلبہ کو یہ بتانا اشد ضروری ہے کہ 'کل' یا 'اصل مقدار' کون سی ہے۔ درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو استعمال کریں تا کہ تصور کی پختگی کے ساتھ طلبہ اس کا اطلاق کرنا بھی سیکھ سکیں۔

different. Therefore, when comparing percentages, one cannot overlook their actual quantities as percentages are not treated as whole numbers but are always applied to a specific value.

Competency 2

Calculate increase or decrease of quantity by a given percentage and solve real-life problems

Stimulus: There are two methods of calculating an increase or decrease of quantity by a given percentage. The first method requires finding out the percentage of the given value first. If there is an increase in quantity, the result is added to the original value. However, if there is a decrease, the result is subtracted from the original value. For example, if the questions ask to calculate increase 70 by 10%, we find 10% of 70 first.

So, $\frac{10}{100} \times 70 = 7$. Now, $70 + 7 + 77$. The increase of 10% to 70 becomes 77. Likewise, decrease calculated by subtracting the quantity. If the question asks for a decrease of 10% from 70, 7 would be subtracted from 70. So, a decrease of 10% from 70 would be 63.

The other method is the formula that can be applied to calculate increase or decrease in quantity.

- To increase the value, use the following formula

$$\text{New value} = \frac{\text{percentage increase} + 100}{100} \times \text{orignal value}$$

- To decrease the value, use the following formula

$$\text{New value} = \frac{\text{percentage decrease} + 100}{100} \times \text{orignal value}$$

Students may choose whichever method is easier for them to calculate an increase or decrease in quantity. However, point out to the students that a 30% increase followed by a 30% decrease (or vice versa) does not bring the quantity to its original value. This is because percentage change is always calculated from the current value – which changes after the first calculation.

Use the exercises from the book for ample practice to further master the concept.

مزید برآں، دو مقداروں کا موازنہ کرنے کے لیے دونوں مقداروں کو فی صد میں ظاہر کیجیے اور پھر ان کا موازنہ کیجیے۔ طلبہ کو بتائیے کہ 150 کا 20% فی صد اور 120 کا 20% فی صد مختلف ہوں گے کیونکہ دونوں کی کل مقدار مختلف ہے لہٰذا فی صدوں کا موازنہ کرتے وقت ان کی اصل مقداروں کو نظرانداز نہیں کیا جا سکتا کیوں کہ فی صد کو مکمل اعداد کے طور پر نہیں لیا جاتا بلکہ یہ ہمیشہ کسی خاص مقدار پر لاگو ہوتا ہے۔

قابلیت ۲

کسی مقدار میں دی گئی فی صد کے مطابق اضافہ یا کمی کرنے کا حساب لگا سکیں اور حقیقی زندگی سے جڑے حسابی مسائل کو حل کر سکیں۔

محرک: کسی مقدار میں دی گئی فی صد کے مطابق اضافہ یا کمی کو حسابی عمل کے ذریعے معلوم کرنے کے دو طریقے ہیں۔ پہلے طریقے میں سب سے پہلے دی گئی مقدار کی فی صد کا تخمینہ لگایا جاتا ہے۔ اگر مقدار میں اضافہ ہو تو اصل مقدار orignal value میں جمع کیا جاتا ہے اور کوئی کمی ہو تو نتیجہ اصل مقدار میں سے نفی کر دیا جاتا ہے۔ جیسے اگر سوال میں 70 میں 10% فی صد کا اضافہ کرنے کے لیے کہا جائے تو پہلے 70 کا 10% فی صد نکالیں گے، اس لیے $\frac{10}{100} \times 70 = 7$ اب $70 + 7 = 77$ یعنی 70 میں 10% اضافہ کرنے پر یہ 77 ہو جائے گا۔ بالکل اسی طرح اگر سوال ہو کہ 70 میں 10% فی صد کمی کی جائے تو 7 کو 70 میں سے نفی یا منہا کرنا ہوگا یعنی 7 کو 70 میں سے نفی کیا جائے گا لہٰذا 70 میں 10% فی صد کی کمی ہونے کے بعد 63 حاصل ہوگا۔

دوسرا طریقہ یہ ہے کسی مقدار میں اضافہ یا کمی کو معلوم کرنے کے لیے فارمولا (formula) استعمال کیا جائے۔

- مقدار میں اضافہ معلوم کرنے کے لیے درج ذیل فارمولا لگائیے:

$$\text{New value} = \frac{\text{percentage increase} + 100}{100} \times \text{orignal value}$$

- مقدار میں کمی معلوم کرنے کے لیے درج ذیل فارمولا لگائیے:

$$\text{New value} = \frac{\text{percentage decrease} + 100}{100} \times \text{orignal value}$$

طلبہ ان میں سے کوئی بھی طریقہ جو ان کے لیے آسان ہو اپنا کر اضافے یا کمی کا حساب لگا سکتے ہیں تاہم اس بات کی نشان دہی کرنا ضروری ہے کہ کسی مقدار میں پہلے 30% فی صد اضافہ اور پھر 30% فی صد کمی (یا اس کے برعکس) کی جائے تو نتیجہ اصل مقدار پر واپس نہیں آتا اس کی وجہ یہ ہے کہ فی صد کی تبدیلی کا حساب ہمیشہ موجودہ مقدار سے لگایا جاتا ہے جو پہلی calculation کے بعد بدل جاتا ہے۔

اس تصور کی مزید مہارت کے لیے کتاب میں دی گئی مشقوں کی زیادہ سے زیادہ مشق کیجیے۔

Unit 7

Introduction to Algebra

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Recognise simple patterns from various number sequences
- Continue a given number sequence and find:
  - Term to term rule
  - Position to term rule

Rationale: Number patterns lay the foundation of algebra. Understanding this competency is essential for students to transition from arithmetic to algebra by helping them identify the relationship between numbers. Students already know how to use basic arithmetic operations on numbers to get the desired results. In this competency, they will learn to understand how arithmetic is used to form relationships between numbers and create patterns. Mastery in number patterns also helps the students enhance their logical thinking skills and build real-life connections. Patterns are everywhere – in nature, music, art, architecture, and technology.

In primary classes, students have learnt to recognise and extend patterns pictorially. They have also explored the concept of extending simple number patterns. To reinforce this competency, start with simpler number patterns and then move on to continuing sequences by finding term-to-term and position-to-term rules. Understanding the rules enhances problem-solving skills students may need for real-life applications such as predicting growth patterns and analysing data trends, thereby strengthening mathematical reasoning.

Stimulus: Start the lesson with a small activity. Draw a number line on the board and begin skip counting by 2s, starting from 0 and moving up to 20. While skipping, ask the students to predict where they would land next. Once you have reached 20, ask them if they recognise any pattern in the number sequence. Allow them some time to answer. They would most likely say that 2 is added to the previous number to get the next number. Introduces the words 'term' and 'rule'. Each number in the sequence is a term, and the rule, in this case is 'add 2'. Recall with them that such a sequence is called a number sequence. Explain to them that the term-to-term rule tells us how to get from one number to the next in a sequence. Students may often assume the rule of the pattern based on the first few terms; therefore, emphasis should be put on recognising the relationship between each term and encouraging careful observation.

Move on to introducing position-to-term rules. This concept is new for the students, therefore, first explain to them that position-to-term rule tells us how to find any number in a sequence using its position. From the number line activity, the sequence was 0, 2, 4, 6, 8, 10, …, 18, 20. So, we know the following observations:

الجبرا کا تعارف

قابلیت ۱

- مختلف عددی سلسلوں سے سادہ نمونوں کو پہچاننا۔
- عددی سلسلوں میں سے معلوم کر سکیں:
  - Term to term rule
  - Position to term rule

استدلال: عددی نمونے (number patterns) الجبرا کی بنیاد رکھتے ہیں۔ اس قابلیت کو سمجھنا طلبہ کے لیے اشد ضروری ہے۔ یہ طلبہ کو عملی حساب (Arithmatic) سے الجبرا کی طرف جانے کے لیے پہلا قدم ہے اور الجبرا کی بنیاد فراہم کرتے ہوئے انھیں اعداد کے درمیان تعلق کو سمجھنے میں مدد دیتے ہیں۔ طلبہ اس بات سے واقف ہیں کہ مطلوبہ نتیجہ حاصل کرنے کے لیے بنیادی حسابی عملوں کا استعمال کیسے کیا جاتا ہے۔ اس قابلیت میں وہ جانیں گے کہ کس طرح وہ عملی ریاضی (Arithmatic) کو استعمال کر کے اعداد (numbers) کے مابین تعلق استوار کر کے نمونے یا پیٹرن تشکیل دے سکتے ہیں۔ عددی نمونوں (number pattern) میں مہارت طلبہ کی منطقی سوچ کو بہتر بنانے اور ان کی روزمرّہ زندگی سے تعلق کو جوڑنے میں مدد فراہم کرتی ہے۔ فطرت (nature) میں اعداد کے نمونے ہر جگہ موجود ہیں، موسیقی، آرٹ، فنِ تعمیر، ٹیکنالوجی وغیرہ ، پرائمری جماعتوں میں طلبہ نمونوں کو تصویری شکلوں میں پہچاننا سیکھتے ہیں۔

وہ اعداد کے سادہ نمونوں کے تصور کو سرسری طور پر پڑھ چکے ہیں۔ اس قابلیت کی دہرائی کے لیے اعداد کے سادہ نمونوں سے ابتدا کرتے ہوئے بتدریج آگے بڑھتے ہوئے سلسلہ وار (position to term) اور (term to term) نمونے تلاش کرنا سکھایئے۔

ان اصولوں کو سمجھ کر طلبہ عبارتی سوالات کو حل کرنے کی صلاحیت کو بہتر بنا سکتے ہیں اور اپنی روزمرّہ زندگی میں پیداوار میں اضافے کی پیش گوئی کو اعداد کی شکل میں ظاہر کرنا اور معلومات کے رجحان کا تجزیہ کرنا جو ریاضی کی توجیہات mathamatical reasoning کو بہتر بناتا ہے۔

محرک: سبق کا آغاز ایک چھوٹی سی سرگرمی سے کیجیے اور بورڈ پر ایک عددی لکیر (number line) کھینچیے اور صفر سے شروع کیجیے اور دو دو پوئنٹ چھوڑتے ہوئے گنتی کرتے ہوئے 20 تک جایئے۔ وقفوں (skiping) کے دوران طلبہ سے پوچھتے جایئے کہ اگلا عدد کیا ہو گا۔ 20 تک پہنچ کر آپ ان سے اعداد کے اس مساوی وقفے کے حوالے سے پوچھیے کہ کیا وہ اعداد کے اس نمونے (pattern) کو پہچان سکتے ہیں؟ اور ان کے جواب کا انتظار کیجیے۔ یقیناً ان کی اکثریت کا جواب ہو گا کہ ہر بار عدد میں 2 کا اضافہ کیا جا رہا ہے۔ اس مرحلے پر آپ طلبہ کو باری (term) اور قاعدہ (rule) جیسے الفاظ متعارف کروایئے۔ وضاحت کیجیے کہ یہاں پر ہر عدد ایک (term) ہے اور اس مثال یا نمونے میں قاعدہ یا اصول (rule) یہ ہے کہ ہر بار 2 کا اضافہ کیا جا رہا ہے۔ انھیں یاد دلایئے کہ اس سلسلے کو عددی سلسلہ کہتے ہیں۔

انھیں بتایئے کہ term to term rule ہمیں بتاتا ہے کہ کسی عددی ترتیب میں ایک عدد سے دوسرے عدد تک کس طرح پہنچتے ہیں۔ مذکورہ بالا مثال میں قاعدہ (rule) یہ کارفرما تھا '2 کا اضافہ' کرنا تھا۔ عموماً طلبہ ابتدائی اعداد کو دیکھ کر ہی (term) کا اندازہ کر لیتے ہیں کہ عددی نمونے میں کون سا قاعدہ (rule) کارفرما ہے۔ لہٰذا طلبہ کو term کے درمیانی تعلق کو سمجھنے کے لیے بطور مشاہدے کرنے پر توجہ مرکوز کرنے کی ترغیب دیجیے۔

اب مزید آگے بڑھتے ہوئے position-to-term rule کو متعارف کروایئے یہ تصور طلبہ کے لیے نیا ہے۔ لہٰذا انھیں سمجھایئے کہ اس اصول کی مدد سے ہم کسی عدد کو اس کے مقام (position) کے ذریعے کسی عددی ترتیب میں کس طرح تلاش کر سکتے ہیں۔ یہ اصول کسی عددی سلسلے میں کسی عدد کے مقام کا تعین کرنے میں مدد کرتا ہے۔ عددی لکیر والی سرگرمی میں 0، 2، 4، 6، 8، 10، ... 18، 20 کو غور کرنے پر پتہ چلے گا کہ یہاں

1^{st} position = 2

2^{nd} position = 4

3^{rd} position = 6

4^{th} position = 8

5^{th} position = 10 … and so on.

So, we know that term = 2 × position, where position is n.

So, to find the position-to-term rule of the above given sequence is $2(n)$. The rule will allow us to find the term for any position without figuring out the entire sequence. For example, for the 30^{th} position, the term will be: 2(30) = 60.

Here, students often confuse term-to-term rule with position-to-term rule, therefore, when explaining, ask questions like 'how can you find the term for the next position?' or can you find the term on the 15^{th} position without writing the entire sequence?'. Students also come to the wrong conclusion, for example, they may write $2 + n$ instead of $2n$. Prompt them into using their rule on multiple positions to see if it is correct. An odd sequence will ultimately hint them on the wrong rule. Using the examples from the book, further strengthen their concept and test their skills using worksheets.

Competency 2

Explain the term algebra as an extension of arithmetic, where letters, numbers, and symbols are used to construct algebraic expressions.

Manipulate simple algebraic expressions using addition and subtraction.

Rationale: Learning and understanding algebra allow students to transition from concrete to abstract thinking, that is they shift from using numbers only to symbols, letters, and alphabets. This lays the understanding that maths is not just calculation but also about relationships and patterns. Algebra further lays foundation for advanced mathematical concepts, logical thinking and problem-solving. It helps with real-life applications of engineering, computing, game design and artificial intelligence.

Stimulus: In arithmetic, numerals such as 0, 1, 2, 3, etc. have fixed values. However, in algebra, a letter, alphabet, or even a symbol can represent any numerical value. Start the lesson by writing a mathematical sentence on the board, such as 2 + ________ = 4. Ask the students what we can fill in in the blank to make the statement true. The students are most likely to say 2. Let them know that the sentence or statement is an open statement as it gives incomplete information to determine whether it is true or false. The blank, in algebra, can be represented as a letter or alphabet. So, in terms of an algebraic equation, it can be expressed as $2 + x = 4$, where x is a variable. Introduce the vocabulary 'terms', 'constant', 'variable', 'algebraic expression', and 'coefficient'.

1st position = 2

2nd position = 4

3rd position = 6

4th position = 8

5th position = 10 … and so on.

لہٰذا ہم جانتے ہیں کہ term = 2 × عدد کا مقام جہاں n عدد کے مقام (position) کو ظاہر کرتا ہے۔

اس لیے درج بالا دی گئی عددی ترتیب یا سلسلے میں (n) 2 ، position to-term rule ہے۔ اس rule کے تحت مکمل عددی ترتیب لکھے بغیر ہم بہ آسانی معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی مخصوص position پر کون سا عدد (term) آئے گا۔ مثال کے طور پر 30 ہی کو لیجیے اگر ہم کو جاننا ہو کہ 30 ویں پوزیشن پر کون سا عدد (term) آئے گا۔ تو: (30) 2 = 60 یعنی 60 وہ عدد ہے جو 30 ویں پوزیشن پر ہو گا۔

عموماً طلبہ term-to-term | position-to-term rule کے درمیان تمیز یا فرق نہیں کر پاتے۔ اس لیے طلبہ کو سمجھاتے ہوئے کچھ ایسے سوالات کیجیے۔ جیسے کہ آپ اگلی پوزیشن کے لیے عدد (term) کو کیسے تلاش کریں گے؟ یا کیا آپ مکمل عددی سلسلہ یا ترتیب لکھے بغیر 15 ویں پوزیشن پر موجود عدد (term) کو معلوم کر سکتے ہیں؟ طلبہ اس صورت میں بھی غلط نتیجے پر پہنچتے ہیں جیسے وہ $2n$ کے بجائے اگر n + 2 لکھ دیں۔ اس لیے انھیں فوری طور پر اس rule کو مختلف position کے لیے آزمانے کی ہدایت کیجیے۔ اگر rule غلط ہو گا تو کسی نہ کسی position پر غلط نتیجہ ظاہر ہو گا۔ طلبہ کو اس تصور کو مزید پختہ کرنے کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں کا استعمال کیجیے۔ اور ان کی مہارت کی جانچ کے لیے ورک شیٹس کا استعمال کروائیے۔

قابلیت ۲

الجبرا کو حساب کی شاخ کے طور پر سمجھانا، جہاں حروف، اعداد اور علامتیں الجبرا کے expressions کے لیے استعمال کی جاتی ہیں۔

جمع اور تفریق کے عمل کو سادہ الجبرا کے expression کو ترتیب دینے کے لیے استعمال کرنا۔

استدلال: الجبرا سیکھنے کا عمل طلبہ کو معروضی سوچ سے تجریدی سوچ کی طرف مائل کرتا ہے اس طرح وہ صرف اعداد کے استعمال کے ساتھ علامتوں، حروفِ تہجی اور حروف کو استعمال کرنا بھی سیکھتے ہیں۔ اور ان کا ذہن اس بات کو سمجھنے کے قابل ہوتا ہے کہ حساب صرف حساب کتاب کرنے کا نام نہیں بلکہ یہ pattern اور relationship سے بھی متعلق ہے۔ خصوصاً الجبرا جو مزید اعلیٰ ریاضی کے تصورات، منطقی سوچ اور مسائل حل کرنے کی بنیاد فراہم کرتا ہے اور یہ انجینئرنگ، کمپیوٹنگ کمپیوٹر کے گیم ڈیزائن کرنے اور مصنوعی ذہانت جیسے شعبوں اور روزمرہ زندگی کے مسئلوں پر اطلاق کرنے کی صلاحیتوں کو پروان چڑھانے میں مدد دیتا ہے۔

محرک: ریاضی یا حساب میں اعداد جیسے 0، 1، 2، 3 وغیرہ کی قدر (value) مقرر ہوتی ہے لیکن الجبرا میں کوئی بھی حرف، حروفِ تہجی (alphabets) یا کوئی بھی علامت (symbol) کسی بھی عدد قدر کی نمائندگی کر سکتا ہے۔ بورڈ پر ریاضی کا کوئی بھی جملہ جیسے 2 + ------ = 4 لکھ کر سبق کا آغاز کیجیے طلبہ سے پوچھیے کہ ریاضی کے اس بیان کی درستی کے لیے ہم خالی جگہ میں کیا لکھیں۔ یقیناً طلبہ کی اکثریت کا جواب ہو گا 2 طلبہ کو بتایئے کہ یہ ایک open statement یعنی ایسا جملہ جس کے صحیح یا غلط ہونے کا پتہ چلانے کے لیے ہمارے پاس مکمل یا ضروری معلومات نہیں۔ الجبرا میں خالی یا blank کو ہم بہ طور حرف یا حروفِ تہجی سے بھی ظاہر کر سکتے ہیں لہٰذا الجبرا کی اس مساوات equation کو 2 + x = 4 کے بھی لکھ سکتے ہیں جہاں x سے مراد ایک متغیر (variable) ہے۔ الفاظ کی اصطلاحات terms، constant، variable، algebric expression اور coefficient کو متعارف کروانے کا یہ موزوں وقت ہے۔

term	number or a letter that is separated by an operator (+, –, ×, ÷)
variable	is a symbol that represents a quantity with an unknown value
constant	a symbol that has a fixed value
algebraic expression	any numeral, variable, or a combination of numeral and variable, connected by one or more signs of number operation
coefficient	symbol or number that appears before the variable

Look at the following examples:

Algebraic expression	Terms	Constants	Variables
$a + b$	a, b	–	a, b
$2a - 3b^2$	$2a$, $3b^2$	2, 3	a, b^2
$x + 2y - 2z$	x, $2y$, $2z$	2, 2	x, y, z
$a + bc$	a, bc	–	a, b, c

Once they are familiar with the key vocabulary of algebra, move on to explaining to them the difference between like and unlike terms. Use different examples to help the students sort the like and unlike terms. This will help the students in performing number operations, such as addition and subtraction, of algebraic expressions.

Now the students have learnt basic vocabulary. They will use it to evaluate, manipulate and simplify algebraic expressions. The first step to this is the use of number operation, addition and subtraction. Students know what like and unlike terms are. Let them know that when performing addition and subtraction, the like terms are added or subtracted from the like terms only. Therefore, it is very necessary to rearrange the terms in such a way that all the like terms are together. For example, in case of adding $3y$ to $5y$, the answer is $8y$. However, $3y$ and $5x$ cannot be added. Extra practice needs to be done for this topic as students often make mistakes in adding the like and unlike terms together. They may write $8yx$ which is wrong when adding algebraic terms. Point out that when terms are added, the power of the sum is the same as that of the terms which are added. That is the power does not change. For example, when x^2 and $2x^2$ are added, the sum is $3x^2$.

Similarly, like terms are subtracted from like terms only. $6y$ can be subtracted from $10y$ to give $4y$, but $8x$ cannot be subtracted from $9y$. When rearranging all the like terms together, ask the students to be careful of the sign before the term as the sign move along with the term.

term	Oprator (+, −, ×, ÷) کے ذریعے الگ کیا گیا حرف یا عدد
variable	وہ علامت جو کسی نامعلوم قدر کے ساتھ مقدار کو ظاہر کرے
constant	ایسی علامت جس کی قدر مقرر ہو
algebraic expression	کوئی بھی عدد، متغیر یا عدد اور متغیر کا مجموعہ جو ایک یا زیادہ علامت کے ساتھ ریاضیاتی عمل سے جڑا ہو
coefficient	ایسا عدد یا علامت جو متغیر (variable) سے پہلے ہو

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کیجیے:

Algebraic expression	Terms	Constants	Variables
$a + b$	a, b	–	a, b
$2a - 3b^2$	$2a, 3b^2$	2, 3	a, b^2
$x + 2y - 2z$	$x, 2y, 2z$	2, 2	x, y, z
$a + bc$	a, bc	–	a, b, c

الجبرا کے کلیدی یا بنیادی الفاظ سے واقفیت کے بعد طلبہ کو like and unlike terms وضاحت سے سمجھائیے اور like and unlike terms کے فرق کو سمجھنے کے لیے مختلف مثالوں کا استعمال کیجیے طلبہ ان کی مدد سے algebric expression کی جمع اور تفریق کو بہ آسانی انجام دے سکیں گے۔

طلبہ بنیادی الفاظ سیکھ چکے ہیں اور اب وہ ان کا استعمال algebric expressions کو سادہ بنانے جانچنے اور ان میں تبدیلی کرنے کے لیے کریں گے۔ جمع اور تفریق جیسے عددی عوامل کو کرنا اس جانب ابتدائی قدم ہے۔ اب جو کہ طلبہ like and unlike terms سے بخوبی واقف ہیں۔ انھیں وضاحت بتائیے کہ جمع اور تفریق کرتے ہوئے صرف like terms کو ہی آپس میں جمع یا منہا کر سکتے ہیں۔ لہٰذا یہ ضروری ہے کہ تمام like terms کو ایک ساتھ ترتیب سے لکھ لیا جائے۔ مثال کے طور پر 34 کو 54 میں جمع کرنے پر جواب 84 ہو گا۔ تاہم 34 اور 5x کو آپس میں جمع نہیں کیا جا سکتا۔ لہٰذا like and unlike terms کو جمع کرتے وقت اکثر طلبہ جو غلطی کرتے ہیں اس سے بچانے کے لیے ضروری ہے کہ انھیں اضافی مشق کروائی جائے عموماً وہ 8yx بھی لکھ دیتے ہیں جو algebric terms کی جمع کا غلط طریقہ ہے۔ اس لیے اس بات کی نشان دہی کیجیے کہ جب terms کو جمع کیا جاتا ہے تو جواب یا حل کے ساتھ لکھی جانے والی power بھی وہی رہتی ہے جو سوال میں تھی یعنی terms کے ساتھ لکھی تھی اور جمع کرنے پر اس میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔ مثلاً اگر x^2 اور $2x^2$ کو جمع کریں تو جواب یا حاصل $3x^2$ ہو گا۔

اس طرح نفی کے عمل میں بھی like terms کو like terms سے گھٹایا یا منہا کیا جاتا ہے جیسے $10y$ میں سے $6y$ کو منہا کرنے پر $4y$ جواب میں حاصل ہوتا ہے۔ لیکن ہم $9y$ میں سے $8x$ کو منہا نہیں کر سکتے۔ طلبہ کو واضح طور پر بتائیے کو like terms کو ترتیب دیتے ہوئے ان کے ساتھ موجود علامت پر بھی غور کیا جاتا ہے کیونکہ یہ terms کے ساتھ منتقل ہوتی ہے۔

Competency 3

Evaluate algebraic expressions by substitution of variables with numerical values Simplify algebraic expressions

Stimulus: An algebraic expression is evaluated by substituting the value of each variable and then simplifying it using BODMAS to get a simplified numerical answer. This competency allows students to understand how variables work in real-life context, such as formula.

The first step to evaluating an algebraic expression is to put in all the values of variables and then use BODMAS. Students often make mistakes when substituting the values of the variable with their signs, therefore, extra attention should be given when solving it.

Similarly, simplifying algebraic expression means rewriting the expressions in a more compact and manageable form. This is done by grouping all the like terms, solving the brackets, and using the properties of algebra. Point out that, sometimes, it is not possible to simplify the terms inside brackets. For example, for $2x + 3b - (a + b)$, the bracket cannot be simplified further. However, it can be expanded to simplify the whole expression.

$$2x + 3b - (a + b)$$

$$2x + 3b - a - b$$

$$2x + 3b - b - a$$

$$2x + 2b - a$$

Now, $2x + 3b - (a + b)$ is simplified to $2x + 2b - a$. Let the students know that when expanding a bracket, the sign that precedes it is very important. If the sign is positive, the brackets can be simply removed. However, if the sign that precedes the brackets is negative, then the signs or each term within the bracket changes (when expanded). It can be said that having a negative sign before the brackets mean multiplying each term (within the bracket) by −1. To master this competency, students would require ample practice. Use examples and exercises from the book to strengthen their concepts.

قابلیت ۳

الجبری expression کو variables کی numerical values کی جگہ رکھ کر تجزیہ کریں اور algebric expressions کو سادہ بنا سکیں۔

محرک : ایک algebric expression کو اس میں دیے گئے ہر variable کی جگہ اس کی عددی قیمت numerical value کو رکھ کر جانچا جاتا ہے۔ پھر اسے BODMAS کے اصول کے تحت حل کیا جاتا ہے تاکہ ایک سادہ عددی جواب حاصل ہو یہ قابلیت طلبہ کو اس بات کو سمجھنے میں مدد دیتی ہے کہ variables حقیقی زندگی کے تناظر میں جیسے کہ کوئی فارمولا وغیرہ میں کس طرح کام کرتے ہیں۔

algebric expression کا تجزیہ کرنے کے لیے سب سے پہلے تمام متغیرات variables کی جگہ ان کی values کو رکھ دیا جاتا ہے اور پھر BODMAS کے اصولوں کا اطلاق کیا جاتا ہے۔ اکثر طلبہ متغیرات variables کی values کے ساتھ ان علامتوں کو تبدیل کرتے ہوئے غلطیاں کرتے ہیں۔ اس لیے سوال حل کرتے وقت اس پہلو پر خاص طور پر توجہ دینی چاہیے۔

اسی طرح algebric expression کو حل کرنے کا مطلب یہ ہے کہ انھیں ایک سادہ، مختصر اور قابلِ فہم شکل میں دوبارہ لکھا جائے۔ یعنی یہ کام کرتے ہوئے تمام like terms کو اکٹھا کیا جائے، قوسین کو حل کیا جائے اور الجبرا کی properties کو استعمال کیا جائے۔ یہاں اس بات کی نشان دہی بھی ضروری ہے کہ بعض اوقات بریکٹ یا قوسین میں موجود terms کو مزید سادہ نہیں بنایا جا سکتا۔ مثال کے طور پر $2x + 3b - (a + b)$ یہاں قوسین میں دی گئی terms کو مزید سادہ نہیں کیا جا سکتا۔ تاہم بریکٹ یا قوسین کو ہٹا کر اسے آسان بنایا جا سکتا ہے۔

$$2x + 3b - (a + b)$$

$$2x + 3b - a - b$$

$$2x + 3b - b - a$$

$$2x + 2b - a$$

لہٰذا $2x + 3b - (a + b)$ کی سادہ شکل $2x + 2b - a$ ہو گی۔ یہاں طلبہ کو بتائیے کہ بریکٹ کو کھولتے یا ہٹاتے ہوئے اس سے باہر موجود علامت بہت اہم ہے اگر مثبت + کی علامت ہو تو بریکٹ کو بہ آسانی ہٹایا جا سکتا ہے۔ تاہم اگر بریکٹ سے پہلے منفی (–) کی علامت یا نشان ہو تو بریکٹ کے اندر والی علامتیں تبدیل ہو جائیں گی یعنی بریکٹ کے اندر موجود ہر term کو بریکٹ کے باہر موجود –1 سے ضرب دی جا رہی ہے۔

اس تصور کو سمجھنے کے لیے طلبہ کو زیادہ مشق کی ضرورت ہو گی۔ لہٰذا کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو استعمال کیجیے۔

Unit 8

Linear Equations

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Recognise and construct linear equations in one variable
- Solve linear equations involving integers, fractions, and decimal coefficients

Rationale: This competency serves as a passageway to algebra. While the previous chapter was an introduction of algebra, this chapter and competency is an application of algebra which trains the students for more complex problems. To be able to recognise and construct linear equations, helps students build logical thinking and problem-solving skills. Furthermore, mastery in linear equations helps the students to build strong foundation for more complex topics, such as simultaneous equations, graphs of linear functions, inequalities, etc.

Recall the basic vocabulary of algebra and the student's prior knowledge about algebraic expressions to introduce them to algebraic equations and linear equations.

Stimulus: Introduce the students to the term algebraic equations, that is, a statement that expresses a relationship of equality between two or more expressions. In simpler words, any two algebraic expressions that are put together with an equal sign between them form an algebraic equation. Point out that while in arithmetic, the statement 3 + 4 = 7 tells that when 3 and 4 are added, the sum is 7. However, in algebra, the equation $a + b = c$ implies that when a number represented by x is added in y, the sum is z. Here, x, y, and z can be any numbers. For example, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8, etc. That is, the variable can have infinite values. Define that any equation with the variable that has the order/exponent/power of 1 is a linear equation. Linear equations are also called first degree equations or simple equations. For example, $4x = 14$, $\frac{10}{x} = 5$. Using the examples mentioned in the book, point out to the students that to maintain equilibrium we add, subtract, multiply and divide by the same number on both sides of the equality sign. Once the students can perfectly identify and solve simple linear equations, move on to demonstrating how to construct linear equations.

Start by asking a question, I am thinking of a number. When I triple it, I get 9 and then when I add 5, I get 14. What number have a thought of?' Let the students think about it and answer. Once they do, ask the students how they came to their answer, and what if you change number 5 to 1. How do they think it will affect the answer? Write more problems on board and ask them to try and solve them. For example:

- Double a number and subtract 4 to get 14. What is the original number?
- Half number plus 4 equal 25.
- Triple a number and add 2 to get 32.

باب ۸

خطّی مساوات

قابلیت ا

- ایک variable میں Linear Equations کو پہچاننا اور بنانا
- مکمل اعداد Integers، کسور Fractions اور اعشاریہ والی Linear Equations کو حل کرنا۔

استدلال: یہ قابلیت الجبرا کی طرف راست قدم فراہم کرتی ہے۔ اگرچہ پچھلا باب الجبرا کا اتعارف تھا لیکن یہ باب اور قابلیت الجبرا کا عملی اطلاق ہے جو طلبہ کو زیادہ پیچیدہ سوالات کو حل کرنے کے قابل بناتی ہے Linear Equations کو پہچاننے اور بنانے کی صلاحیت طلبہ میں منطقی سوچ اور سوالات حل کرنے کی مہارتیں سکھاتی ہے۔مزید برآں، Linear Equations میں مہارت حاصل ہونے سے طلبہ میں زیادہ پیچیدہ موضوعات جیسے Simutaneaus equations میں Linear Functions کے گراف، inequalities کو سمجھنے کی مضبوط بنیاد فراہم کرتی ہے۔

الجبرا کی بنیادی Vocabulary اور طلبہ کی سابقہ معلومات جیسے algebric equations کیا ہوتی ہیں وغیرہ کا اعادہ کروایئے۔ تاکہ انھیں algebric equations اور Linear equations سے متعارف کروایا جا سکے۔

محرک: طلبہ کو algebric equations کی اصطلاح سے متعارف کروایئے۔ یہ ایک ایسا بیان ہے جو دو یا دو سے زائد expression کے درمیان مساوی تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔ آسان الفاظ میں ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ جب دو algebraic expressions کے درمیان مساوی (=) کا نشان یا علامت ہوتی ہے تو وہ algebriac equations کہلاتی ہے۔ نشان دہی کیجیے کہ حساب یا ریاضی میں $7 = 4 + 3$ سے ظاہر ہوتا ہے کہ جب 3 اور 4 کو جمع کیا جائے تو 7 حاصل ہوتا ہے۔ تاہم الجبرا میں $a + b = c$ کی equation یہ ظاہر کرتی ہے کہ جب x کسی عدد کی نمائندگی کرے اور اسے y میں جمع کیا جائے تو z حاصل ہوتا ہے یہاں x، y اور z کوئی عدد بھی ہو سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر $8 = 5 + 3 ,5 = 3 + 2 ,3 = 2 + 1$ وغیرہ یعنی variables کی values لا محدود ہو سکتی ہے۔

وضاحت کیجیے variable کے ساتھ کوئی بھی equation جس میں order/exponant/power اگر 1 ہو تو اسے ہم Linear equation کہتے ہیں۔ اسے ہم پہلی ڈگری والی equation یا Simple equation بھی کہہ سکتے ہیں۔مثال کے طور پر $4x = 14,\ 10/x = 5$ کتاب میں دی گئی مثالوں کو استعمال کرتے ہوئے طلبہ کو بتایئے کہ equation میں مساوات کو برقرار رکھنے کے لیے مساوی کی علامت = کے دونوں طرف ایک ہی عدد سے جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کرنا ضروری ہے۔ جب طلبہ اس بات کو اچھی طرح سمجھ لیں اور Linear equations کو بہ خوبی حل کرنا سیکھ لیں۔ تو انھیں Linear equations کو بنانا سکھایئے۔

پہلے طلبہ سے پوچھیے کہ میں نے ایک عدد سوچا ہے جب میں اسے تین گنا کروں تو 9 حاصل ہوتا ہے۔ اگر میں اس میں 5 کو جمع کروں تو 14 ملتا ہے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ میں نے کون سا عدد سوچا ہے؟

طلبہ کو سوچنے کا وقت دیجیے تاکہ وہ جواب دے سکیں = جب وہ ایسا کرلیں تو ان سے پوچھیے کہ وہ اس جواب تک کیسے پہنچے اور اگر آپ 5 کو 1 سے بدل دیں تب کیا ہو گا۔ ان کے خیال میں جواب پر کیا اثر ہو گا؟ بورڈ پر اسی طرح کے مزید سوال لکھیے اور طلبہ سے کہیے کہ انھیں حل کریں مثال کے طور پر:

- اگر عدد کو دو گنا کریں اور اس میں سے 4 کو نفی کریں تو جواب ملے گا 14 بتایئے اصل عدد کون سا ہے؟
- عدد کے نصف میں 4 کو جمع کریں تو 25 کے برابر ہو جائے۔
- عدد کو تین گنا کریں اور اس میں 2 کو جمع کریں تو 32 حاصل ہو۔

Have the students guess and use mathematical work let them figure out the answers to the questions. Ask the students if they can write these statements mathematically. Tell them to assume that x is the number you've thought of and write $3x + 5 = 14$, $2x - 4 = 14$, $\frac{x}{2} + 4 = 25$, $3x + 2 = 32$. Ask the students if any of these statements are true for the above questions. Ask them to substitute x with different numbers to see if the statement gives the correct results.

Demonstrate, using above-mentioned brainstorming examples, that the equality sign in algebraic equations tells us that the values on both sides of the equal sign are the same.

$3x + 5 = 14$

$3x + 5 - 5 = 14 - 5$ (subtract 5 from both sides)

$3x = 9$

$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$ (divide by 3 on both side)

$x = 3$

The value of x is 3 to make the equation $3x + 5 = 15$ true. Use different real-life examples and word problems so the students can do ample practice and obtain mastery.

طلبہ کو اندازہ لگانے دیں تا کہ وہ حساب کتاب کر کے سوالوں کے اصل جواب تک پہنچ سکیں۔ طلبہ سے پوچھیے کہ کیا وہ ان بیانات کو ریاضی کے سوالوں کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ انھیں بتائیے کہ x وہ عدد ہے جس کے بارے میں آپ نے سوچا ہے اور لکھیے $3x + 5 = 14$, $2x - 4 = 14$، $\frac{x}{2} + 4 = 25$, $3x + 2 = 32$ طلبہ سے پوچھیے کہ کیا درج بالا عبارتی سوالوں کے لیے لکھے گئے یہ ریاضی کے سوال درست ہیں۔ اب ان سے کہیں کہ وہ x کی جگہ پر مختلف اعداد لکھ کر ان کی جانچ یا حل کریں۔ کہ لکھے گئے سوال سے درست نتیجہ ملتا ہے کہ نہیں۔

ذہنی آزمائش کے لیے مذکورہ بالا مثالوں کو بورڈ پر لکھیے اور انھیں بتائیے کہ مساوی کی علامت یا نشان algebraic equations میں ظاہر کرتا ہے کہ اس کے دونوں طرف لکھی گئی values مساوی ہیں۔

$3x + 5 = 14$

$3x + 5 - 5 = 14 - 5$ (دونوں طرف 5 کو نفی کیجیے)

$3x = 9$

$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$ (دونوں طرف 3 سے تقسیم کیجیے)

equation، $3x + 5 = 15$ کو درست ثابت کرنے کے لیے x کی value، 3 ہونی چاہیے۔ روزمرّہ زندگی سے جڑے عبارتی سوال اور مثالوں کی زیادہ مشق کرنے سے طلبہ کو اس قابلیت پر عبور حاصل ہو گا۔

Unit 9

Geometry

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Identify and differentiate between parallel lines, perpendicular lines, and transversal.
- Identify adjacent angles and find unknown angles related to parallel lines and transversals (corresponding, alternate, and vertically opposite angles).

Rationale: Geometry is a fundamental branch of mathematics and has practical use in almost all fields of life. Understanding lines and angles helps the students develop spatial reasoning where they can manipulate objects, such as their size, shapes, location and orientation by transformation and rotation into space. It also helps students understand angles, angle properties, shapes, figures, and objects and use it in engineering, technology, art, design, and architecture. It also helps develop students' motor skills, precision and problem-solving skills.

Stimulus: Start the lesson by recapping basic geometry in the class. This would include revising what a point, ray, line segment and line is. Revise with the students that point indicates a position. It has no dimensions, that is it does not have any length, breadth or height. Furthermore, a collection of points that extend infinitely in both directions is called a line. If you look through a magnifying glass, a line appears to have some thickness. This, however, is not true, because, by definition, a line only has one dimension – length. A line segment is a section of a line that has two endpoints. The line segment is of a certain length. When the students understand the difference between a point, line and line segment, tell them a ray is a part of a line that only extends in one direction, that originates from a point and moves in one direction only. It also moves for an infinite length. Some lines meet one another, that is they intersect. The point at which they intersect is called the point of intersection. This revision will help the students to understand what parallel, perpendicular and transversal lines are.

Move on to explaining the difference between parallel, perpendicular and transversals. Any two lines that are equidistant with one another and lie on the same plane but never meet one another are parallel lines. Students, however, tend to believe that all lines that do not touch or meet one another are parallel. This is not true as not all lines are equidistant from one another. Perpendicular lines, on the other hand, intersect with one another at a 90° angle. Make it clear that any two lines that meet but do not form a 90° angle are not perpendicular to each other. Similarly, if two parallel lines intersect at any point, they will form a transversal.

باب
۹

جیومیٹری (علم ہندسہ)

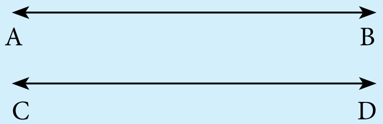
قابلیت ۱

- متوازی خطوط، عمودی خطوط اور عرضی خط (transversal) کی شناخت اور ان میں تمیز کرسکیں۔
- متصل زاویوں کی شناخت کرسکیں اور عرضی خطوط سے متعلقہ نامعلوم زاویوں (مطابق (corresponding)، متبادل (alternate) اور متقابل (vertically opposite) زاویے) کو تلاش کرسکیں۔

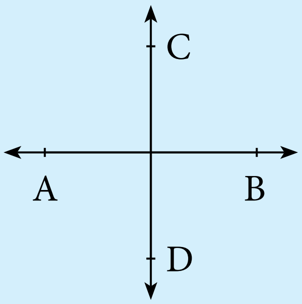
استدلال: جیومیٹری، ریاضی کی ایک بنیادی شاخ ہے اور زندگی کے تقریباً تمام شعبوں میں اس کا عملی اطلاق ہوتا ہے۔ زاویوں اور خطوط کی سمجھ بوجھ طلبہ میں مکانی سوچ spatial reasoning پیدا ہوتی ہے اور نشوونما پاتی ہے۔ جس کی مدد سے وہ اشیا کو ان کی جسامت، اشکال، مقام اور سمت کے مطابق تبدیلی اور خلا میں گردش کے ساتھ تخیل میں لا سکتے ہیں۔ یہ علم طلبہ کو زاویوں، زاویوں کی خصوصیات، اشکال، جسامت اور اشیا کو سمجھنے اور اسے انجینئرنگ، ٹیکنالوجی، آرٹ، ڈیزائن اور فنِ تعمیر میں استعمال کرنے میں مدد دیتا ہے۔ یہ طلبہ کی حرکی مہارتوں (motor skills)، درستی اور مسئلہ حل کرنے کی مہارتوں کو بھی فروغ دیتا ہے۔

محرک: سبق کی ابتدا بنیادی جیومیٹری کو دہراتے ہوئے کیجیے جس میں نقطہ (point) کیا ہے، ray، line اور line segment کا اعادہ بھی شامل ہونا چاہیے۔ طلبہ کے ساتھ دہرایئے کہ نقطہ کسی مقام کی نشان دہی کرتا ہے۔ اس کی کوئی جہت Dimension یعنی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی نہیں ہوتی۔ مزید برآں نقاط کا مجموعہ جو دونوں سمتوں میں لامحدود طور پر پھیلا ہوا ہے، خط (line) کہلاتا ہے اگر آپ عدسے کی مدد سے اسے دیکھیں تو یہ کچھ موٹا دکھائی دیتا ہے لیکن حقیقت میں یہ صرف ایک جہت (dimension) رکھتا ہے یعنی لمبائی۔ ایک قطعۂ خط (line segment) ایک خط یعنی لائن کا ایک حصہ ہے جس کے دو اختتامی نقطے (end points) ہوتے ہیں اور یہ خاص لمبائی کا ہوتا ہے۔ جب طلبہ نقطہ، لائن اور لائن سیگمنٹ کے فرق کو سمجھ لیں تو انھیں شعاع (ray) کے بارے میں بتایئے کہ یہ لائن یا خط کا ایک حصہ ہے جو صرف ایک سمت میں پھیلتی اور بڑھتی ہے۔ یہ ایک نقطے سے نکلتی اور ایک جانب لامحدود سمت میں حرکت کرتی ہے۔ اس کی لمبائی لامحدود ہوتی ہے۔ کچھ خطوط ایک دوسرے سے باہم ٹکراتے ہیں جس نقطے پر یہ ایک دوسرے کو کاٹتے (intersect) ہیں وہ نقطۂ تقاطع (point of intersection) کہلاتا ہے۔ اس اعادے کے بعد طلبہ متوازی (parallel) عمودی (prependicular) اور عرضی (transversal) خطوط (lines) کو بہتر طور پر سمجھ سکیں گے۔

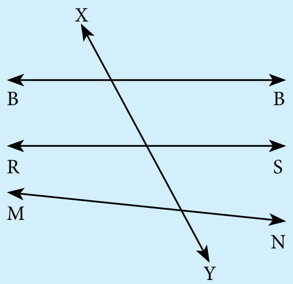
سبق کو مزید آگے بڑھاتے ہوئے طلبہ کو parallel، perpendicular اور transversal متوازی عمود اور کے درمیان موجود فرق کو سمجھایئے۔ کوئی بھی دو لائنیں یا خطوط جو ایک ہی سطح (plane) پر واقع ہوں اور ہر مقام پر ایک دوسرے سے مساوی فاصلے پر ہوں لیکن آپس میں کبھی نہ ملیں، وہ متوازی لائنیں کہلاتی ہیں۔ اکثر طلبہ یہ سمجھتے ہیں کہ تمام وہ لائنیں جو آپس میں نہ ملتی ہوں وہ متوازی ہوتی ہیں۔ یہ درست نہیں ہے کیونکہ ضروری نہیں کہ وہ لائنیں ایک دوسرے سے مساوی فاصلے پر بھی ہوں۔ عمودی لائنیں (perpendicular lines) یا خطوط وہ ہیں جو ایک دوسرے کو 90 ڈگری یا درجے کے زاویے (90° angle) پر قطع کرتی ہیں۔ مزید وضاحت کیجیے کہ کوئی بھی دو لائنیں جو آپس میں ملتی ہیں مگر 90° کا زاویہ نہیں بناتیں وہ عمودی نہیں ہیں۔ اسی طرح اگر دو متوازی لائنیں کسی ایک مقام پر ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں تو وہ خطوطِ تقاطع (intersecting lines) کہلاتی ہیں۔



Paralle lines

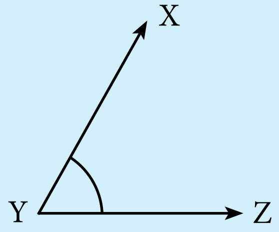


Perpendicular lines

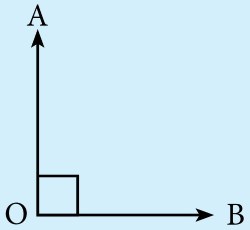


XY is transversal

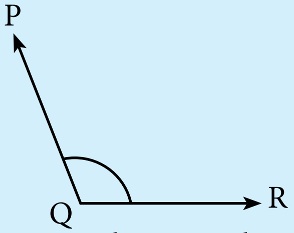
The students have prior knowledge of angles. They know that angles are formed when two rays or line segments originate from the same point called the vertex (vertex means the edge or corner). Recall the different types of angles with the students. Test their knowledge by asking them what right angle, acute angles, obtuse angle, straight angle and reflex angles are. Once they answer, draw the following figures on the board to let them know and easily recall.



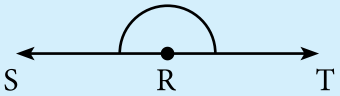
Acute Angle



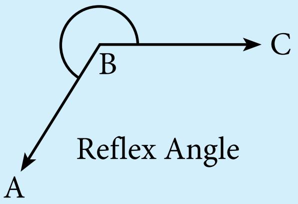
Right Angle



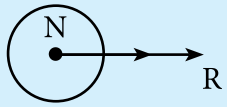
Obtuse Angle



Straight Angle

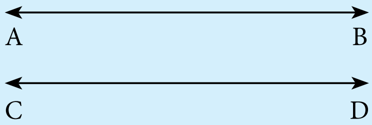


Reflex Angle

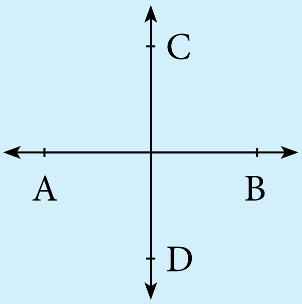


Full Rotation Angle

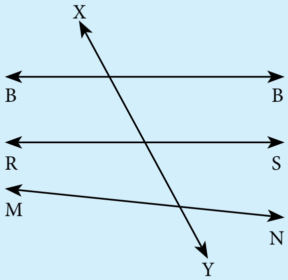
Using the transversal, of two parallel lines explain that corresponding angles and alternate angles are equal. The interior angles, however, are supplementary (that is two angles that sum to 180°). Similarly, to check if two lines that are intersected are parallel, check if their corresponding angles and alternate angles are equal. And if the interior angles are equal to 180°. Look out for some misconceptions that students have. They tend to get confused and believe that vertically opposite angles are always adjacent. Clarify to them that vertically opposite angles are not adjacent but are across one another at an intersection. Similarly, while the angle measurements of corresponding and alternate angles are equal, they are not the same.



متوازی لائنیں

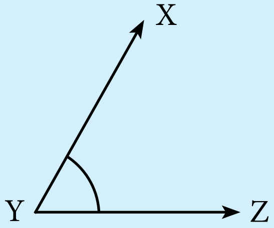


عمودی لائنیں

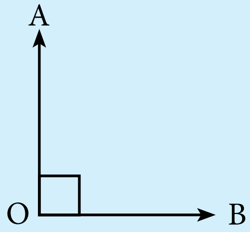


XY ایک transversal ہے

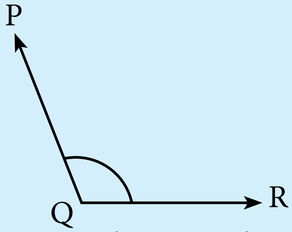
طلبہ زاویوں سے پہلے سے واقف ہیں وہ جانتے ہیں کہ زاویے اس وقت بنتے ہیں جب دو شعاعیں یا ایک نقطے سے نکلتی ہیں جسے راس (vertex) کہتے ہیں (راس کا مطلب ہے کونا) طلبہ کو مختلف قسم کے زاویے یاد دلائیے ان کی معلومات کی جانچ کے لیے ان سے پوچھیے کہ right angle, acute angle, obtuse angle، straight angle اور reflex angle کسے کہتے ہیں۔ ان کے جواب دینے کے بعد بورڈ پر ان زاویوں کو بنائیے تاکہ وہ آسانی سے انھیں پہچان سکیں اور یاد کرسکیں۔



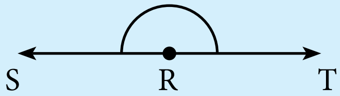
Acute Angle



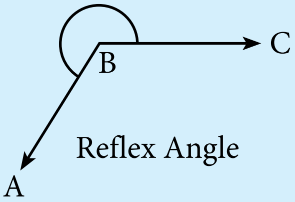
Right Angle



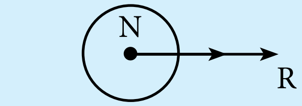
Obtuse Angle



Straight Angle



Reflex Angle



Full Rotation Angle

دو متوازی خطوط اور transversal کو استعمال کرتے ہوئے وضاحت کیجیے کہ corresponding angles اور alternate angles برابر ہوتے ہیں۔ تاہم supplementary interior angles ہوتے ہیں (وہ زاویے جو مل کر 180° درجے کا زاویہ بناتے ہیں) اسی طرح اگر آپ یہ جانچنا چاہتے ہیں کہ دو خطوط یا لائنیں متوازی ہیں یا نہیں تو یہ چیک کیجیے کہ آیا ان کے corresponding angles اور alternate angles برابر ہیں؟ اور یہ کیا ان کے interior angles 180° درجے کے برابر ہیں؟

اب آیئے کچھ ایسی پر نظر ثانی کرتے ہیں جن کی وجہ سے طلبہ کو غلط فہمی ہو جاتی ہے اکثر طلبہ یہ سمجھ کر الجھن میں پڑ جاتے ہیں کہ عمودی طور پر مخالف زاویے (vertically opposite angles) ساتھ ساتھ ہمیشہ ملحقہ (adjacent) ہوتے ہیں۔ ان پر واضح کیجیے کہ یہ ملحقہ نہیں ہوتے بلکہ ایک دوسرے کے آمنے سامنے ہوتے ہیں۔ اسی طرح یہ سمجھنا کہ correspoinding اور alternative زاویے آپس میں برابر ہیں۔ لہٰذا وہ ایک جیسے ہیں۔ جب کہ وہ ایک جیسے نہیں ہیں۔

Competency 2

- Construct angles of specific measures (30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 105° and 120°) and bisect angles using a pair of compasses
- Construct a perpendicular (from a point on the line and outside the line) and a perpendicular bisector

Stimulus: This competency would require students to use their knowledge of the previous competency and apply it practically. Begin the lesson with a short recap of the different kind of angles. For each kind, use a real-life example so students can relate angles to their everyday life. 3 o'clock on the clock shows a right angle, while a small or big pizza slice can represent acute angles – 30º and 60º, and an open laptop screen is an obtuse angle. Construction requires certain tools to be used. The correct use of these instruments results in precise construction of angles and bisectors. Once the angle revision is done, demonstrate the tools, pencil, ruler, protractor and compass, in the classroom.

Emphasise the proper use of ruler, protractor and compass. Tell the students to use a ruler that is not chipped from any side. Ask them when constructing, they need to align the ruler properly to the points firmly, so it does not slip. When using the pencil, have the students sharpen it freshly so it is pointed and makes a thin line. Ask the student to draw light lines in case they need to be corrected. The correct use of protractor is also necessary during construction of angles and bisectors. If the protractor is not aligned to the starting point of construction, it may result in an angle that is either big or smaller than the required angle. Students also tend to misread the protractor and construct incorrect angles (and read them from the opposite side, for example, make obtuse angles instead of acute angle), therefore, accuracy in measurement should be highly emphasised on. Similarly, the compass width is to be kept constant, so the radius of the arc does not change and result in an incorrect bisector.

Competency 3

- Recognise rotational symmetry, find the point of rotation and order of rotational symmetry
- Reflect an object using grid paper and a pair of compasses and find the line of reflection by construction

Stimulus: Start the lesson by recalling the concept of symmetry with the students. Bring printouts of different shapes, such as a square, a circle, and a triangle. Ask the students if these cut-outs will be the same on both sides if they are folded in half. Ask them what would happen if they were unevenly folded from the corner. Would they still be the same on both sides? Recall with them what reflective symmetry is, that is a shape has reflective symmetry if it is a mirror image of one another. Once the students have done revision, tell them that they will learn the symmetry that involves rotation.

On the board, from a point draw a complete circle. Explain that the complete circle does a full rotation, that is 360º. Any object or shape that is rotated about a fixed point by an angle of 360º, does one complete rotation. Perform an activity in class. Using the square cut-out from the previous

قابلیت ۲

- مخصوص پیمائشوں (30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 105° and 120°) کے زاویے بنائیں اور زاویوں کو پرکار کی مدد سے دو برابر حصوں میں تقسیم کرسکیں۔
- ایک perpendicular (جو لائن پر موجود نقطے اور لائن سے باہر موجود نقطے سے ہو) اور ایک perpendicular bisector بنا سکیں۔

محرک : اس قابلیت کو پیدا کرنے کے لیے طلبہ کو اپنی سابقہ قابلیت کے علم کو عملی طور پر استعمال کرنا ہو گا۔ سبق کا آغاز مختلف قسم کے زاویوں کے مختصر اعادے سے کیجیے زاویوں کی ہرقسم کی وضاحت کے لیے روزمرہ زندگی سے مثالوں کا استعمال کرنا ضروری ہے تاکہ طلبہ زاویوں کو اپنی حقیقی زندگی سے جوڑسکیں جیسے گھڑی 3 بجے پر زاویہ قائمہ (right angle) بناتی ہے۔ جب کہ پیزا کا ایک چھوٹا یا بڑا ٹکڑا 30° اور 60° کے حادہ زاویوں (acut angles) کو ظاہر کرتا ہے، اور laptop کا ایک کھلا ہوا اسکرین ایک منفرجہ زاویہ (obtuse angle) ہے۔ اشکال کی تشکیل کے عمل میں درستی پیدا کرنے کے لیے مخصوص آلات کی ضرورت پڑتی ہے۔ لہٰذا اشکال کی تشکیل میں ان آلات کے درست استعمال سے زاویے اور bisector درست طریقے سے تشکیل پاسکیں گے۔ زاویوں کا اعادہ مکمل کروانے کے بعد کمرۂ جماعت میں استعمال ہونے والے مختلف آلات، پنسل، رولر، پروٹیکٹر (زاویہ پیما) اور کمپاس (پرکار) کو استعمال کرکے دکھائیے۔

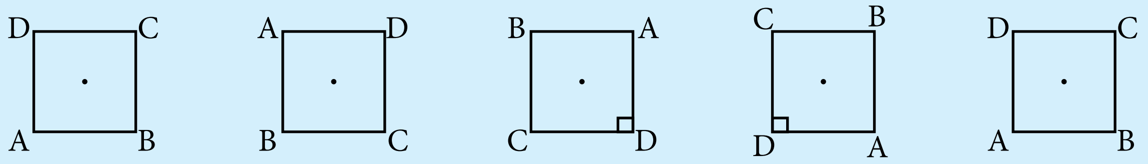
پرکار (compass)، زاویہ پیما (protractor) فٹا (ruler) کے درست استعمال پر توجہ دیجیے۔ طلبہ سے کہیں کہ ٹوٹا ہوا فٹا استعمال نہ کریں زاویے بناتے وقت، وہ ruler کو درست طور پر نقطوں پر رکھیں اور مضبوطی سے قابو میں رکھیں تاکہ وہ حرکت نہ کرے۔ اسی طرح پنسل استعمال کریں تو اس کی نوک کو اچھی طرح تراشیں تاکہ ایک باریک اور واضح لکیر یا خط کھینچا جاسکے۔، طلبہ سے کہیں کہ وہ ہلکی لکیر کھینچیں تاکہ ضرورت پڑنے پر اسے مٹاکر بہ آسانی درست کیا جاسکے۔ پروٹیکٹر یعنی زاویہ پیما کا درست استعمال بھی زاویے اور ان کے bisectors کے لیے ضروری ہے۔ اگر زاویہ پیما یا پروٹیکٹر کو درست طریقے سے ابتدائی نقطے پر نہ رکھا جائے تو بننے والا زاویہ مطلوبہ پیائش کے زاویے سے بڑا یا چھوٹا بنے گا۔ اکثر طلبہ پروٹیکٹر کو غلط پڑھتے ہیں اور غلط زاویہ بناتے ہیں (جیسے مخالف سمت سے پڑھنا اور حادہ (acute) کی جگہ منفرجہ (obtuse) زاویہ بنالینا) اس لیے پیائش کی درستی پر خاص زور دیں۔ اسی طرح پرکار کی چوڑائی (width) کا مستقل (constant) رکھنا بھی ضروری ہے تاکہ قوس (arc) کا رداس نہ بدلے اور نتیجے میں bisector غلط نہ بن جائے۔

قابلیت ۳

- rotation symmetry کو پہچانیں، point of rotation اور order of rotational symmetry کو تلاش کرسکیں۔
- گرڈ پیپر اور پرکار کی مدد سے کسی شکل کا عکس بنائیں، اور line of reflection کو معلوم کریں۔

محرک : سبق کا آغاز Symmetry کے تصور کے اعادے سے کیجیے اور مختلف اشکال جیسے مربع، دائرہ اور مثلث یا تکون کے پرنٹ آوٹ بھی ساتھ لے آئیے۔ طلبہ سے پوچھیے کہ اگر ان کٹ آوٹس کو آدھا فولڈ کر دیں تو کیا یہ دونوں طرف سے ایک جیسے دکھائی دیں گے۔ اور اگر انھیں ایک کونے سے غیر مساوی طور پر نصف موڑ (fold) دیا جائے تو اب بھی وہ ایک جیسے ہوں گے؟ طلبہ کے ساتھ مل کر reflective symmetry کی بازیافت (recall) کیجیے۔ کہ یہ shape ایک reflective symmetry ہے اگر یہ ایک دوسرے کی ہم شکل ہیں۔ دہرائی مکمل کر لینے کے بعد طلبہ کو بتائیے کہ اب وہ symmetry کے ساتھ rotation کو بھی سیکھیں گے۔ بورڈ پر ایک نقطہ (point) لگا کر اس کے گرد مکمل دائرہ بنائیے اور وضاحت کیجیے کہ مکمل دائرہ full roration یعنی 360° درجے کا مظہر ہے۔ اگر کوئی چیز (object) یا شکل (shape) جسے 360° درجے کے زاویے سے کسی مقررہ نقطے (fixed point) پر گھمایا جاتا ہے تو یہ ایک مکمل گردش (complete rotation) کرتا ہے۔

activity, stack it in the center (also called the point of rotation) using a thumbnail on a cork board. Mark a point on one of the corners of the square and do a full rotation of the square. Ask the students if the square came back to its original position after the rotation. The students are likely to say yes. Define rotational symmetry to the students, that is a shape has rotational symmetry if it comes back to its original position after a full rotation. Furthermore, the number of times an object comes back to its original position within the rotation is called the order of rotation. Since a square comes 4 times, the order of rotation of a square is 4.



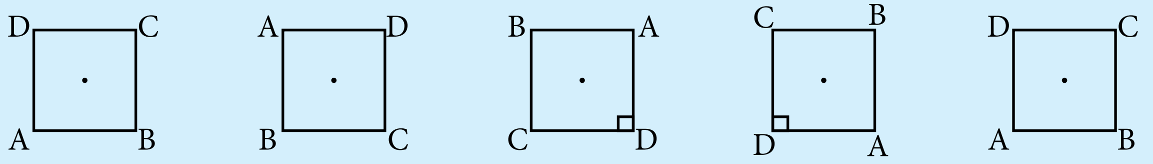
Square | Rotation: 90° | Rotation: 180° | Rotation: 270° | Rotation: 360°

Note that every shape has at least a rotational symmetry of order 1, as it will always come back to its original position after one complete rotation. Use different examples of cut-outs to show students' rotational symmetry. The following table will help you.

Cut-out of shape	Order of Rotational Symmetry
Square	4
Rectangle	2
Equilateral triangle	3
Heart	1
Irregular polygon	1
Hexagon	6

Once the students gain mastery in rotational symmetry, move on to reflection. The point of focus and the use of tools will be the same as constructing angles and bisector. However, an extra point is to emphasise to the students that accuracy when counting the units should be practised for precise reflection. Misconceptions include students believing that the reflected image is always to the left or right. Let the students know that direction or reflection depends on the line of reflection. Furthermore, let the students know that the reflected image is not always identical in orientation, but is the mirror image which makes the orientation reversed. Use examples and exercise questions from the textbook to help the students master this concept.

کمرۂ جماعت میں ایک سرگرمی کروائیے اس کے لیے آپ پچھلی سرگرمی میں استعمال کیے جانے والے square کے کٹ آؤٹ کا استعمال کیجیے۔ مربع یا چوکور کو ایک کارک بورڈ پر کسی یا تھمب ٹیگ پن کی مدد سے اس کے مرکز (جسے نقطۂ گردش بھی کہا جاتا ہے) میں لگادیں۔ پھر چوکور کے کسی ایک کونے پر نشان لگائیں اور پورے چوکور کو ایک مکمل گردش دیجیے۔ طلبہ سے پوچھیے کہ کیا گردش کے بعد مربع اپنی اصل حالت پر واپس آ گیا طلبہ کہیں گے 'جی ہاں'، اب آپ انھیں rotational symmetry کی تعریف بتائیے کہ اگر کوئی شکل مکمل گھماؤ کے بعد اصل مقام پر واپس آجائے تو یہ اس کی گردش rotational symmetry کہلاتی ہے۔ مزید برآں کہ جتنی بار کوئی شکل یا شے ایک مکمل گردش کے دوران اپنی اصل حالت میں واپس آتی ہے اسے گردش ترتیب (order of rotation) کہا جاتا ہے۔ کیونکہ چوکور (مربع) 4 بار گھومنے پر اپنی اصلی پوزیشن پر واپس آتا ہے۔ اس لیے مربع کی گردشی ترتیب 4 ہے۔



Square | Rotation: 90° | Rotation: 180° | Rotation: 270° | Rotation: 360°

اکثر طلبہ یہ سمجھتے ہیں کہ کوئی شکل جو گھمانے پر ایک جیسی دکھائی دے اس میں rotational symmetry ہوتی ہے۔ لہٰذا اس بات پر زور دیجیے کہ کسی بھی شکل میں rotational symmetry اس وقت ہوتی ہے جب وہ مکمل طور پر 360° درجے کا چکر لگا کر اپنی اصل حالت میں لوٹ آئے۔ نوٹ کریں کہ ہر شکل کی کم سے کم گردشی ترتیب 1 ضرور ہوتی ہے کیونکہ یہ اپنی ایک مکمل گردش یا چکر کو پورا کرنے کے بعد اپنی ابتدائی پوزیشن پر واپس آجاتی ہے۔ طلبہ کو گردشی ہم آہنگی (rotational symmetry) دکھانے کے لیے مختلف قسم کے cutouts کو بہ طور مثال استعمال کیجیے مندرجہ ذیل جدول آپ کو مدد فراہم کرے گا۔

Cut-out of shape	Order of Rotational Symmetry
Square	4
Rectangle	2
Equilateral triangle	3
Heart	1
Irregular polygon	1
Hexagon	6

طلبہ کے rotational symmetry پر عبور حاصل کر لینے کے بعد انھیں انعکاس (reflection) کے بارے میں بتائیے۔ اس میں point of focus اور آلات کو استعمال بالکل ویسا ہی ہو گا جیسا کہ زاویے اور bisector کو بنانے میں ہوتا ہے۔ تاہم ایک توجہ طلب نکتہ accuracy ہے جو طلبہ کو سمجھانا ضروری ہے کہ انھیں پیمائشی اکائیاں یا یونٹس گننے میں درستی کی مشق کرنا ہو گی تا کہ انعکاس مکمل طور پر درست اور صحیح مقام پر ہو۔ اکثر طلبہ اس غلط فہمی کا شکار ہوتے ہیں کہ سمجھتے ہیں کہ عکس (reflected image) ہمیشہ دائیں یا بائیں طرف بنتا ہے۔ لہٰذا انھیں یہ وضاحت سے بتائیے کہ reflection کی سمت کا انحصار ہمیشہ line of reflection پر ہوتا ہے۔ مزید یہ کہ عکس کی سمت ہمیشہ اصل تصویر کی ترتیب orientation کو ظاہر نہیں کرتی۔ یہ آئینہ (mirror image) ہی ہے جو اصل تصویر کی ترتیب کو الٹا کر دیتا ہے۔ اس تصور کی پختگی کے لیے درسی کتاب میں دی گئی مثالوں اور مشقوں کو کروائیے۔

Unit 10

Measurement

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

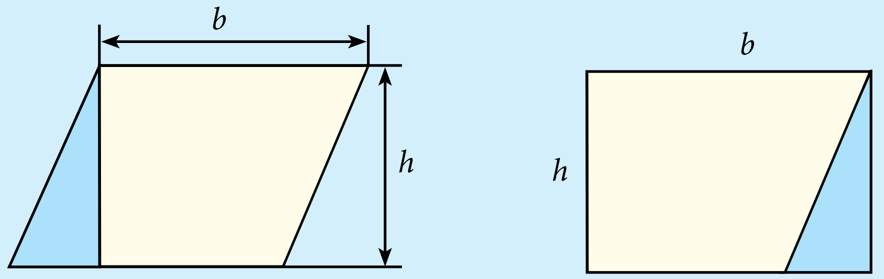
Calculate the area of a path (inside or outside) a rectangle or square, parallelogram, triangle and trapezium

Solve real-world problems involving area and perimeter.

Rationale: Understanding this competency is essential for students to deepen their knowledge about different shapes. Calculating the area of shapes, including paths, helps the students practice real-life application of mathematical concepts. Students are already familiar with different shapes and their measurements. From the previous class, they must have learnt how to measure sides of a basic shapes, such as square and rectangle, and use formula to calculate the area and perimeter.

Following the recap of the formula to area and perimeter of square and rectangle, explain to the students how a shape is manipulated to find the area of the path (inside or outside) a rectangle or square. Later, introduce them to the area of parallelogram, triangle and trapezium.

Stimulus: Start the lesson with a hands-on activity to recap and revise how to calculate the area of square or rectangle. The activity requires students to use a metre-rule to measure the sides of their classroom or playground and then calculate the area. While they are measuring the sides, recap with them the units of measuring length and breadth and ultimately the unit of area, which is squared. Once they have calculated the area of the classroom, ask them to find the perimeter as well. Mention to them that the units of perimeter are the same as the length. This activity will help them carry out practical applications of the SLO. Move on to explaining to them how to calculate the area of parallelogram – a quadrilateral in which opposite sides are parallel and equal in length. Point out that the formula for calculating the area of a parallelogram is the same as that of a rectangle, because a parallelogram can be rearranged into a rectangle with the same area.



قابلیت ۱

- ایک مستطیل (rectangle) یا مربع (square)، متوازی الاضلاع (parallelogram) مثلث (triangle) اور (trapezium) کے اندر یا باہر کے راستے کا رقبہ معلوم کرسکیں۔
- روزمرّہ زندگی سے جڑے عبارتی سوالات (جن میں رقبہ اور احاطہ (perimeter) شامل ہو) کو حل کرسکیں۔

استدلال: طلبہ کے لیے ضروری ہے کہ اس قابلیت کو سیکھیں تا کہ مختلف اشکال کے حوالے سے وہ اپنے فہم کو مزید بہتر بنا سکیں۔شکلوں کے رقبے کا حساب بشمول راستے لگانا طلبہ کو عملی زندگی میں ریاضی کے تصورات کے اطلاق اور استعمال شکلوں کے رقبے کا حساب لگانے میں مدد دیتا ہے۔

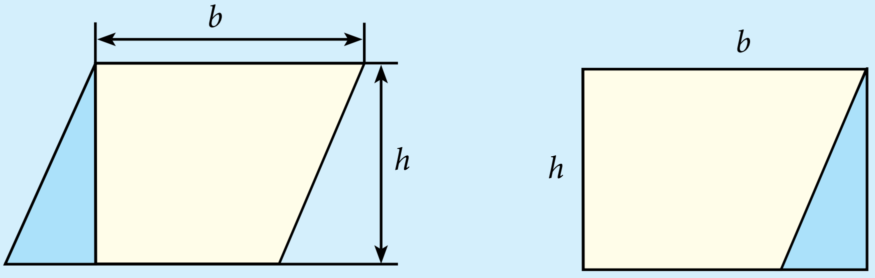
طلبہ مختلف شکلوں اور ان کی پیمائشوں سے پہلے سے واقف ہیں۔پچھلی جماعتوں میں سیکھ چکے ہیں کہ بنیادی اشکال جیسے مربع (square) اور مستطیل (rectangle) کی کس طرح پیمائش کرتے ہیں اور رقبہ (area) اور احاطہ (perimeter) نکالنے کے لیے فارمولا یا کلیہ استعمال کرتے ہیں۔مربع اور مستطیل کے رقبے اور احاطے کے فارمولوں کے اعادے کے بعد، طلبہ کو وضاحت سے سمجھایئے۔کہ جب ہم مربع یا مستطیل کے اندر یا باہر ایک اور مربع یا مستطیل بناتے ہیں تو دراصل دو مربعوں یا مستطیلوں کے رقبے کا فرق نکال کر راستے (path) کے رقبے کا حساب کرتے ہیں۔ اس کے بعد طلبہ کو متوازی الاضلاع (parallelogram)، مثلث (triangle) اور (trapozium) کے رقبے (area) سے متعارف کروایئے۔

محرک: سبق کا آغاز ایک عملی سرگرمی سے کیجیے تا کہ مربع یا مستطیل کے رقبے کی پیمائش کا اعادہ کروایا جا سکے۔ دوران سرگرمی طلبہ سے کہیں کہ وہ ایک میٹر رول (metre-rule) کا استعمال کرتے ہوئے اپنی جماعت (class) یا کھیل کے میدان کے اطراف کی پیمائش کر کے ان کا رقبہ (area) معلوم کریں۔

جب وہ اطراف (sides) کی پیمائش کرلیں تو ایک بار لمبائی اور چوڑائی کو ناپنے کی اکائیوں سے رقبہ کی اکائی جو کہ مربع میٹر ہوتی ہے کا اعادہ ضرور کروائیں۔

جب وہ کمرۂ جماعت کا رقبہ معلوم کرلیں تو ان سے احاطہ (perimeter) معلوم کرنے کے لیے کہیں۔ انھیں بتایئے کہ perimeter کی اکائی وہی ہوتی ہے جو لمبائی کی ہے۔ اس سرگرمی سے انھیں سیکھنے کے مقاصد SLO کو عملی طور پر سمجھنے میں مدد ملے گی۔ اس کے بعد طلبہ کو متوازی الاضلاع (parallelogram) کا رقبہ (ایسا چوکور یا چہار ضلعی شکل جس کی مخالف سمتیں متوازی اور لمبائی میں برابر ہوتی ہیں) معلوم کرنے کا طریقہ بتایئے۔

طلبہ کے لیے نشان دہی کیجیے کہ اس کا رقبہ معلوم کرنے کا فارمولا وہی ہے جو مستطیل (rectangle) کا ہے کیونکہ ایک parallelogram کو دوبارہ اس طرح ترتیب دیا جا سکتا ہے کہ وہ ایک مستطیل (rectangle) کی شکل اختیار کرلے اور اس کا رقبہ بھی تبدیل نہ ہو۔



طلبہ کو سمجھایئے کہ trapezium ایک چوکور (quadilateral) ہے جس کے صرف دو اطراف آپس میں متوازی ہیں جب کہ باقی دو اطراف ہمیشہ برابر نہیں ہوتے parallelogram کے برعکس trapezium کی اونچائی (height) ان دو متوازی اطراف کے درمیان کھینچی گئی عمودی لائن ہوتی ہے۔

Explain to the students that trapezium is a quadrilateral which has only two sides parallel. The non-parallel sides are not always equal. Unlike the parallelogram, the height of the trapezium is the perpendicular distance between two sides. Following the starter activity, make a path within the classroom and ask the students how they would calculate the area of the path.

Draw a parallelogram on board and a diagonal to divide it into two triangles. Since both the triangles are superimposed, the area of triangle can thus be calculated as $\frac{1}{2} \times$ (area of parallelogram) or $\frac{1}{2} \times$ base $\times$ height.

Draw the following table on the board and explain it to them:

Name	Perimeter	Area
Square	$4l$	l^2
Parallelogram	$2(a + b)$	bh
Trapezium	$a + b + c + d$	$\frac{1}{2}(a + b) \times h$
Triangle	$a + b + c$	$\frac{1}{2}hb$

The table above will help the students to continuously revise and revisit the formula for the area and perimeter of different figures.

Competency 2

Calculate the surface area and volume of cube and cuboids

Solve real-life word problems involving the surface area and volume of cubes and cuboids

Rationale: The outcome of this competency depends on the student's knowledge to differentiate between 2D and 3D shapes. In the previous competency, the students have mastered calculating area and perimeter of flat 2D shapes. They can now apply this knowledge to the faces of 3D shapes. Since cube and cuboid have faces that are either squares or rectangles, students can calculate the area of each face and sum them up to determine the surface area of cubes and cuboids.

Once the students are familiar with the concept of surface area is the area of outer surface of any 3D solid, use their knowledge as a bridge to explain that volume is the space occupied by a solid. It is important to highlight that the surface area and volume both have different units of measurements as surface area only caters length and breadth of a face of a solid while volume also caters the height of a solid along with length and breadth.

Stimulus: To start the lesson, show nets of cubes and cuboids and help students identify the faces of both 3D solids. Real-life examples of solids, such as dice or a cuboidal book or box can be brought into the class and shown to the students.

ابتدائی سرگرمی کے بعد، کمرۂ جماعت کے اندر ایک راستہ بنائیے اور طلبہ سے پوچھیے کہ وہ اس راستے (path) کا رقبہ کیسے معلوم کریں گے۔ بورڈ پر ایک parallelogram بنائیے اور اسے دو ایسے ایک وتر (diagonal) کے ذریعے دو مثلثوں میں تقسیم کیجیے۔ کیونکہ دونوں مثلث ایک دوسرے پر منطبق (superimposal) ہیں لہٰذا مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے حسابی شکل میں یوں بھی لکھا جا سکتا ہے (area parallelogram) × $\frac{1}{2}$
یا $\frac{1}{2}$ × height × base

مندرجہ ذیل جدول (table) کو بورڈ پر بنائیے:

Name	Perimeter	Area
Square	$4l$	l^2
Parallelogram	$2(a + b)$	bh
Trapezium	$a + b + c + d$	$\frac{1}{2}(a + b) \times h$
Triangle	$a + b + c$	$\frac{1}{2}hb$

اوپر دیا گیا جدول طلبہ کو مختلف اشکال کے رقبے (area) اور احاطے (perimeter) کے کلیے یا فارمولے کو بار بار دہرانے اور یاد رکھنے میں مدد دے گا۔

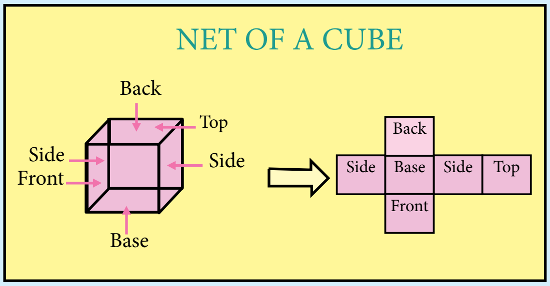
قابلیت ۲

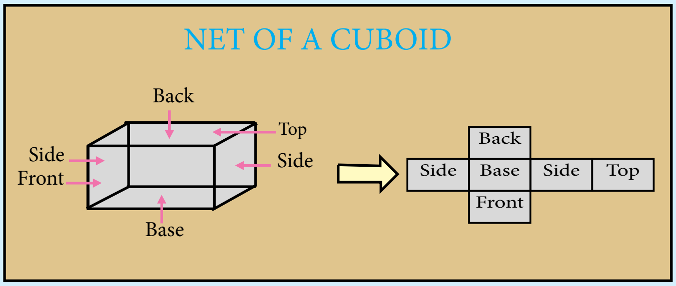
- مکعب (cube) اور مکعب نما (cuboid) کا surface area اور volume کا حساب لگا سکیں۔
- حقیقی زندگی میں cube اور cuboids سے متعلق عبارتی سوالوں کو حل کر سکیں۔

استدلال: اس قابلیت کا نتیجہ طلبہ کی دو ابعادی (2D) اور سہ ابعادی (3D) اشکال میں تمیز کرنے کی صلاحیت پر منحصر ہے۔ پچھلی قابلیت میں طلبہ نے دو ابعادی (2D) یعنی چپٹی اشکال کے رقبے اور احاطے (perimeter) کی پیمائش میں عبور حاصل کر لیا تھا۔ اب وہ اس قابلیت کا اطلاق سہ ابعادی (3D) اشکال پر بھی کر سکیں گے۔ مربع یا پھر مستطیل شکلوں کے ہوتے ہیں لہٰذا وہ ان میں سے ہر شکل کا area الگ الگ معلوم کر کے اور پھر ان کو جمع کر کے سطحی رقبہ (surface area) بہ آسانی معلوم کر سکتے ہیں۔

جب طلبہ اس بات کو بہ خوبی سمجھ لیں کہ سطحی رقبہ کسی بھی سہ ابعادی (3D) ٹھوس شکل کی بیرونی سطح کا رقبہ ہوتا ہے تو ان کی اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے وضاحت کیجیے کہ حجم سے مراد وہ جگہ ہے جو کوئی ٹھوس گھیرتا ہے۔ اس بات کو اجاگر کرنا بھی ضروری ہے۔ کہ surface area اور volume دونوں کی پیمائشی اکائیاں مختلف ہیں۔ کیونکہ سطحی رقبہ محض کسی شکل کی لمبائی اور چوڑائی (length + breath) کا مجموعہ ہے جب کہ حجم سے مراد کسی ٹھوس کی لمبائی، چوڑائی اور اس کی اونچائی ہے۔

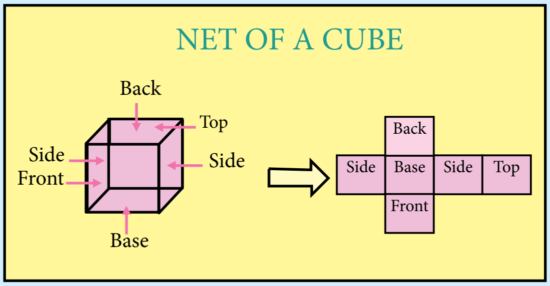
محرک: سبق کا آغاز کرتے ہوئے طلبہ کو cubes اور cuboids کے nets دکھایئے اور انھیں شناخت کرنے میں مدد دیجیے روزمرہ زندگی میں موجود ٹھوس اشیا جیسے dice یا کوئی cuboid شکل کی کتاب ڈبّا وغیرہ بھی کمرۂ جماعت میں لا کر طلبہ کو دکھایا جا سکتا ہے۔

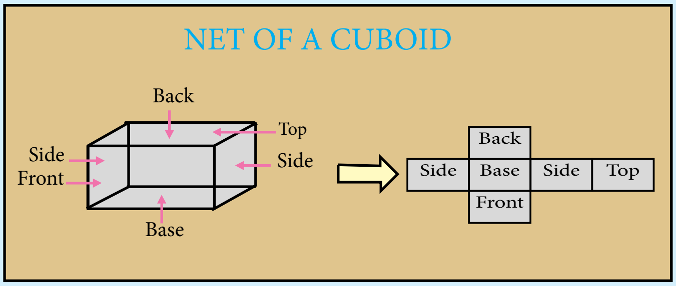




The visualization of nets helps students recognise how 2D shapes form the surfaces of 3D objects and to perform complex calculations such as finding the surface area of cubes and cuboids. Recall the characteristics of 3D shapes with the class using the table in the book. The surface area of a cube and cuboid can simply be calculated by finding the area of each face of a cube and a cuboid and adding them. The area of a cube can be summarized as $6l^2$ because a cube has 6 square faces. The surface area of a cuboid is $2(lb + lh + bh)$ as the cuboid has 6 rectangular faces (or 4 rectangular faces and 2 square faces).

Similar to the hands-on activity of Competency 1, students can measure the length, breadth and height of the room using a metre-rule to calculate the volume. Use of solids can also be used for the visualization of volume. Stack multiple cubes or cuboids over one another to determine the volume of a solid. When calculating the volume, the unit is cubed (that is cm^3, m^3, etc.) as length, breadth, and height are considered.





net کا تصور طلبہ کو یہ پہچاننے میں مدد کرتا ہے کہ کس طرح 2D اشکال، کسی سہ ابعادی (3D) اشیا کی سطحوں کو تشکیل دیتی ہیں اور کس طرح پیچیدہ حساب کتاب جیسے cubes اور cuboides کی سطحوں کا تخمینہ لگانے میں مدد دیتی ہیں۔ اب کتاب میں دیے گئے جدول کا استعمال کرتے ہوئے 3D اشکال کا اعادہ کروایئے۔ cube اور cuboid کے سطحی رقبے کو معلوم کرنے کا حسابی طریقہ بے حد آسان ہے یعنی ان کی ہر سطح کا رقبہ الگ الگ معلوم کر کے انھیں جمع کرلیا جائے تو کل سطحی رقبہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ مکعب کا رقبہ مختصراً بہ طور $6l^2$ کیا جا سکتا ہے کیونکہ مکعب کی 6 سطحیں یا رخ ہوتے ہیں جن میں سے ہر سطح ایک مربع ہوتی ہے لہٰذا اس کا سطحی رقبہ $2(lb + lh + bh)$ جب کہ cuboid کی 4 سطحیں (faces) مستطیل اور 2 سطحیں مربع نما ہوتی ہیں قابلیت 1 کی طرح یہاں بھی طلبہ حجم کا حساب لگانے کے لیے میٹر رول کا استعمال کر کے کمرۂ جماعت کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی ناپ سکتے ہیں۔ حجم کے تصور کو واضح کرنے کے لیے کچھ ٹھوس اشیا کمرۂ جماعت میں لا کر طلبہ کو دکھایئے مثلاً cubes یا cuboids کو اوپر تلے رکھ کر انھیں وضاحت سے بتایا جا سکتا ہے کہ کوئی بھی ٹھوس جسم کتنا حجم رکھتا ہے۔

کسی مربع کے حجم کا تخمینہ لگانے کی اکائی مربع یعنی cm^3 ; m^3 وغیرہ ہے۔ کیونکہ لمبائی، چوڑائی اور اونچائی تینوں شامل ہیں۔

Unit 11

Data Handling

Bilingual Concept Builder Notes

Competency 1

- Identify and organise different types of data (i.e., discrete, continuous, grouped and ungrouped)
- Draw, read, and interpret horizontal and vertical multiple bar graphs and pie charts (including real-life word problems)

Rationale: The outcome of this competency depends on the student's ability to identify, interpret and represent data in pictorial form such as graphs, facts, figures, etc. On an everyday basis, we come across all sorts of data. This data is obtained through several steps which include collection, organization, display and finally, interpretation. Changes in population, climate, rainfall, prices, and business are all examples of how statistics are applied in daily lives. Understanding the different types of data is essential for choosing the most appropriate method of analysis.

Start the topic with introducing students to basic vocabulary used for data handling. Once they are familiar, move on to differentiating the different kinds of data and thereby representing and interpreting them.

Stimulus: Start the lesson by introducing the students to what data is. Explain to them that data is any kind of information that we get or obtain. Ask the students their age and write them all on the board. Assuming there are 15 students in the class, the ages might be: Age of students in the classroom:

11, 12, 10, 11, 12, 12, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 11, 12, 10

The age of students in the classroom is the titles, while the age is the information regarding the title. The title and the information are collectively known as data. Data can be in form of numbers, pictures, symbols, etc. Move on to explaining to the students what different types of data are. Explain to them the difference between grouped and ungrouped data, that is any collected data arranged in a particular way is grouped data. The above example of data is ungrouped, and it is not organised. However, if this ungrouped data was to be converted into grouped data it would be as follows:

Ages	Number of students
10	3
11	6
12	6

Throughout the lesson, emphasise on why there is a need to sort group data. Furthermore, explain to the students the difference between discreet and continuous data. Students tend to get confused between these two terms so it should be made sure that they know that the values of discreet data are

باب ۱۱
شماریات

قابلیت ۱

- مختلف اقسام کے data کی شناخت کرسکیں اور اسے ترتیب دیں جیسے مجرد (discrete)، مسلسل (continuous)، گروہی (grouped) اور غیر گروہی (ungrouped)
- افقی، عمودی اور multiple بار گرافوں اور پائی چارٹ (piechart) کو بنائیں، پڑھیں اور ان کے تعلق کو روزمرہ زندگی سے جڑے عبارتی سوالوں اور مثالوں کے ساتھ سمجھ سکیں۔

استدلال: اس قابلیت کا نتیجہ طالب علم کی data کو پہچاننے، سمجھنے اور تصویری شکل میں پیش کرنے کی مہارت یا صلاحیت پر منحصر ہے جیسے کہ گراف، حقائق، اعداد و شمار وغیرہ۔ روزمرہ کی بنیاد پر ہمارا واسطہ ایسے ڈیٹا سے رہتا ہے جسے کئی مراحل سے گزر کر حاصل کیا جاتا ہے جس میں جمع یا اکٹھا کرنا، ترتیب دینا، ظاہر یا پیش کرنا اور آخر میں اس کو سمجھنا شامل ہے۔ آبادی، آب و ہوا، بارش، قیمتیں اور کاروبار میں تبدیلیاں اس بات کی مثالیں ہیں جہاں شماریات (statistics) یا اعداد و شمار کو روزمرہ زندگی میں کیسے لاگو کیا جاتا ہے۔ ڈیٹا کی مختلف اقسام کو سمجھنا ضروری ہے تاکہ تجزیے کے لیے موزوں ترین طریقۂ کار کو منتخب کیا جا سکے۔

data handling کے لیے استعمال ہونے والے بنیادی الفاظ سے طلبہ کو متعارف کرواتے ہوئے سبق کی ابتدا کیجیے۔ جب وہ ان الفاظ سے مانوس ہو جائیں تو انھیں ڈیٹا کی مختلف اقسام میں فرق کرنا سکھایئے اور پھر ان کو پیش کرنے اور ان کی وضاحت کرنے کا عمل سمجھایئے۔

محرک: سبق کے آغاز میں طلبہ کو بتایئے کہ ڈیٹا کیا ہے؟ ڈیٹا سے مراد وہ معلومات ہے جو ہم اکٹھا یا حاصل کرتے ہیں۔ طلبہ سے ان کی عمریں معلوم کیجیے اور انھیں بورڈ پر لکھتے جایئے فرض کیجیے کہ کمرۂ جماعت میں 15 طلبہ ہیں جن کی عمریں ہیں:

11, 12, 10, 11, 12, 12, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 11, 12, 10

طلبہ کی عمر عنوانات ہے جبکہ ان کی عمر عنوان سے متعلق معلومات ہے۔ عنوان اور معلومات کو مجموعی طور پر ہم ڈیٹا کہتے ہیں۔ ڈیٹا اعداد، تصاویر، علامتوں وغیرہ کی شکل میں ہوسکتا ہے۔ اب آپ طلبہ کو ایک قدم آگے کی طرف بڑھاتے ہوئے سمجھایئے کہ ڈیٹا کی مختلف اقسام کیا ہیں۔ پھر group and ungrouped ڈیٹا کے درمیان فرق کو واضح کیجیے گروپ ڈیٹا سے مراد ایسا ڈیٹا ہے جو خاص طریقے سے ترتیب دیا گیا ہو مذکورہ بالا ungrouped ڈیٹا کی ایک بہترین مثال ہے کیونکہ یہاں ڈیٹا ترتیب میں نہیں ہے۔ یعنی غیرمنظم ہے۔ تاہم اگر اس ungrouped ڈیٹا کو grouped ڈیٹا میں تبدیل کیا جائے تو یہ کچھ اس طرح ہو گا:

Ages	Number of students
10	3
11	6
12	6

دوران سبق اس بات پر مسلسل زور دیجیے کہ یہاں ڈیٹا کو ترتیب دینے کی ضرورت کیوں ہے مزید یہ کہ discrete اور continous ڈیٹا کے درمیان فرق کو سمجھایئے کیونکہ اکثر طلبہ ان دو اصطلاحوں کے درمیان الجھ جاتے ہیں لہٰذا اس بات کو یقینی بنایئے کہ وہ discrete data کو واضح طور پر سمجھ سکیں۔ جیسے کہ اسکول میں طلبہ کی تعداد یا پارکنگ میں کھڑی گاڑیوں کی تعداد۔ discrete ڈیٹا کی مثالیں ہیں جب کہ continuous ڈیٹا کو پیمانے (scale) پر ناپا جا سکتا ہے اور اس کی values لامحدود ہوسکتی ہیں جیسے کہ اسکول یا کمرۂ جماعت میں موجود طلبہ کا قد اور وزن۔

distinct, like the number of students in a school or the number of cars parking in a parking lot. Whereas continuous data is measured on a cale and can have infinite values, like the height or weight of the students in a school or class.

Once the students understand the terms associated with data and its types, move on to data representation through graphs. In this grade, the students will learn to draw, represent and interpret data from bar charts and pie charts. Students have prior knowledge of horizontal and vertical bar graphs, but here, they will learn to represent and interpret data on multiple bar graphs. Multiple bar graphs represent the relationship between two or more different categories. For example, the number of boys in each compared to the number of girls in each grade. Make sure to point out that to make the comparison evidently clear, the bars should be different, for example, different coloured bars for boys and girls, shaded or unshaded, etc. Similarly, when drawing multiple bar graphs, students should be careful of labelling the vertical and horizontal axis. The categories go on the vertical axis while the corresponding values go on the horizontal axis. For bar graphs, the width of the bar remains constant, while the height of each bar represents the value of the respective category. Use different real-life examples to read and interpret bar graphs. The students may also be asked to carry out a survey to find out the number of books read by Grade 6, 7, and 8 in the months of June, July and August.

Once the students gain mastery in multiple bar graphs, explain to them that pie charts are another kind of graph that represents data in a circle. Each sector of a circle represents a category. Since a circle is equal to 360 degrees, each sector of the circle is a fraction of 360 degrees. The value of each category can be calculated by dividing the angle (representing a category) by the sum of angles (that is 360) and then multiplying it to the total. When drawing pie chart, a protractor must be used for proper measurement of each sector.

Competency 2

- Calculate the mean, median, and mode for ungrouped data and solve related real-life word problems

Stimulus: In statistics, there are different tools. One of the tools is the measures of central tendency which describes the average or center of a data set. Students have prior knowledge of what average is and how to calculate it. Here they will learn other measures of central tendency, that is mean, median and mode. Mean is the sum of all values divided by the number of values in each data set. The mean of a dataset is a single value that represents the entire distribution. Median is the middle value of a data set. Point out to the students that the correct median can be calculated only when the data is arranged in an order. For an odd number of values in a data set, the middle value is the median. However, for even the number of values in a data set, the median is the average of two middle values. Use different examples to help the students master this competency. The third measure of central tendency is the mode, which is the value that appears the most in the dataset.

طلبہ ڈیٹا اور اس کی اقسام سے متعلق اصطلاحوں (terms) کو سمجھ لیں تو انھیں گراف کے ذریعے ڈیٹا کو پیش کرنا سکھایئے۔ اس جماعت میں طلبہ یہ سیکھیں گے کہ ڈیٹا کو بار چارٹ اور پائی چارٹ کی مدد سے کیسے بنایا، ظاہر کیا اور سمجھا جاتا ہے۔ طلبہ افقی اور عمودی بار گراف کو پہلے سے جانتے ہیں لیکن یہاں وہ multiple bar graphs کے ذریعے ڈیٹا کو ظاہر کرنا اور سمجھنا سیکھیں گے۔ multiple بار گراف دو یا دو سے زائد مختلف زمروں (catagories) کے درمیان تعلق کو ظاہر کرتے ہیں۔مثال کے طور پر، ہر جماعت میں لڑکیوں اور لڑکوں کی تعداد کا موازنہ۔ اس بات کو یقینی بنایئے کہ موازنے کو واضح بنانے کے لیے ہر زمرے کے لیے بار مختلف ہونے چاہییں جیسے کہ لڑکے اور لڑکیوں کے لیے مختلف رنگوں کے بار، سایہ دار کسی شکل میں بھرے ہوئے یا غیر سایہ دار خالی حصوں سے ظاہر کرنا وغیرہ۔ اسی طرح multiple بار گراف بناتے ہوئے طلبہ کو عمودی اور افقی محوروں کی labelling کی درستی کے لیے خاص توجہ دینی ہوگی۔ یاد رکھیے کہ زمروں کو عمودی محور پر اور ان کی متعلقہ مقداروں کو افقی محور پر درج کیا یا لکھا جاتا ہے۔ اسی طرح بار گراف کی چوڑائی مستقل رہتی ہے۔ جب کہ ہر بار کی اونچائی متعلقہ زمرے کی value کو ظاہر کرتی ہے طلبہ کو روزمرہ زندگی کی مثالوں کے ذریعے بار گراف کو پڑھنے اور سمجھنے کی مشق کروایئے۔ اس ضمن میں طلبہ سے ایک ایسا سروے کرنے کے لیے کہیں جس میں وہ معلوم کریں کہ جماعت 6، 7 اور 8 کے طلبہ نے جون، جولائی اور اگست کے مہینوں میں کتنی کتابیں پڑھیں۔

طلبہ جب multiple بار گراف میں مہارت حاصل کرلیں تو انھیں سمجھایئے کہ piechart بھی ایک قسم کا گراف ہے جو دائرے کی شکل میں ڈیٹا کی نمائندگی کرتا ہے۔ دائرے کا ہر حصہ ایک مخصوص زمرے کو ظاہر کرتا ہے۔ کیونکہ ایک مکمل دائرہ 360° درجے کا ہوتا ہے اس لیے دائرے کا ہر حصہ 360° درجے کا ایک حصہ ہے۔ لہٰذا ہر زمرے میں value کو calculate کرنے کے لیے زاویے (ایک زمرے) کو زاویوں کے مجموعے (یعنی 360° درجے) سے تقسیم کرکے اور پھر اسے کُل مجموعے سے ضرب دیا جاتا ہے۔ piechart بناتے ہوئے ہر زمرے کی درست پیائش کے لیے پروٹریکٹر کو استعمال کرنا ضروری ہے۔

قابلیت ۲

- ungrouped ڈیٹا کے mean، median اور mode کا حساب لگا سکیں اور روزمرہ زندگی سے جڑے اس سے متعلقہ عبارتی سوالوں کو حل کرسکیں۔

محرک: اعداد و شمار جانچنے میں مختلف قسم کے tools کا استعمال کیا جاتا ہے measures of tendency ان میں سے ایک ہے۔ جو کسی Data set کا اوسط یا مرکز کو ظاہر کرتا ہے۔ طلبہ جانتے ہیں کہ اوسط کیا ہے اور اسے کیسے نکالا جاتا ہے۔ اس قابلیت میں وہ measures of central tendency سے متعلق سیکھیں گے یعنی mean، میڈین median اور mode۔ mean سے مراد کسی Data Set میں موجود ایسی value ہے جو پورے ڈیٹا سیٹ کی نمائندگی کرتی ہے۔ اسے نکالنے کے لیے تمام values کے مجموعے کو ان کی تعداد پر تقسیم کیا جاتا ہے۔ median کسی ڈیٹا سیٹ کی درمیانی قدر (value) کو کہتے ہیں۔ طلبہ کو وضاحت سے سمجھایئے کہ median کی حسابی درستی کے لیے ضروری ہے کہ ڈیٹا کو کسی ترتیب میں رکھا گیا ہو۔ یعنی اگر کسی ڈیٹا سیٹ میں values کی تعداد طاق (odd) ہو تو درمیان والی قدر (value) کو median کہا جائے گا۔ تاہم کسی ڈیٹا سیٹ میں اگر تعداد جفت (even) ہو تو درمیانی دو values کا اوسط (average) لے کر median کو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس قابلیت میں مہارت پیدا کرنے کے لیے مختلف مثالوں کو استعمال کیجیے۔ central of tendency کا تیسرا measure موڈ (mode) ہے یہ کسی ڈیٹا سیٹ میں سب سے زیادہ پائی جانے والی value ہے۔

Competency 3

- Explain experiments, outcomes, sample space, events, equally likely events and probability of a single event
- Differentiate the outcomes that are equally likely and not equally likely to occur (including real-life word problems)

Rationale: Probability is used in everyday life for decision making. It helps us know the likelihood of an event happening. Probability helps in predicting the weather, the chances of winning a sports game, and assessing the risks of accidents and natural disasters, etc. Probability helps students make sense of uncertainty and chance. The mastery in this competency helps them assess risks in everyday life and predict the result based on known information.

Stimulus: Start the lesson by flipping a coin and asking the students what they think the outcome will be. They will either say heads or tails. Tell them that the likelihood or either heads or tails is called probability. In case of flipping a coin, the outcomes will either be heads or tails. So, the probability of getting either of the outcome is $\frac{1}{2}$ that is the number of ways an event can happen/total number of possible outcomes. Introduce the students to the key terms of probability:

outcome	A single possible result of an experiment
Event	Set of one or more outcomes
Sample space	Set of all possible outcomes of an experiment
Experiment	A procedure that can be infinitely repeated and has a well-defined set of possible outcomes
Equally likely	Equal chances of few events happening
Not equally likely	Unequal chances of two events happening

Move on to detailed explanation of these terms using the book.

قابلیت ۳

- experiment، outcomes، sample space، events، یکساں طور پر ممکنہ واقعات اور ایک واقعے کے امکان کی وضاحت کر سکیں۔
- مساوی ممکنہ نتائج اور غیر مساوی ممکنہ نتائج میں (بشمول حقیقی زندگی سے جڑے عبارتی سوالوں کے) فرق کر سکیں۔

استدلال: امکان (probability) روزمرہ زندگی میں فیصلہ سازی کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ یہ ہمیں کسی واقعہ کے رونما ہونے کا امکان جاننے میں مدد فراہم کرتا ہے۔ امکان موسم کی پیش گوئی، کھیل کے میچ کو جیتنے کے امکانات، حادثات اور قدرتی آفات وغیرہ جیسے خطرات کا اندازہ لگانے میں مدد دیتا ہے۔ امکان طلبہ کو غیر یقینی صورت حال اور ممکنات کو سمجھنے کا احساس یا شعور فراہم کرتا ہے۔ اس قابلیت میں مہارت حاصل ہونے کے بعد طلبہ روزمرہ زندگی میں خطرات کا جائزہ لینے اور دستیاب معلومات کی بنیاد پر نتائج کی پیش گوئی کرنے کے قابل ہو جاتے ہیں۔

محرک: کمرۂ جماعت میں ایک سکّہ اچھالتے ہوئے سبق کی ابتدا کیجیے اور طلبہ سے پوچھیے کہ ان کے خیال میں نتیجہ کیا نکلے گا؟ وہ یا تو 'ہیڈز (head)' کہیں گے یا 'ٹیلز (tail)' انھیں بتائیے کہ head یا tail کا آنا ہی امکان ہے۔ سکّہ اچھالنے کی صورت میں ممکنہ نتائج یا تو head ہو گا یا tail لہٰذا نتیجے میں کسی ایک امکان کے حاصل ہونے کا امکان $\frac{1}{2}$ ہے۔

outcome	A single possible result of an experiment
Event	Set of one or more outcomes
Sample space	Set of all possible outcomes of an experiment
Experiment	A procedure that can be infinitely repeated and has a well-defined set of possible outcomes
Equally likely	Equal chances of few events happening
Not equally likely	Unequal chances of two events happening

درسی کتاب کی مدد سے ان اصطلاحات terms کی تفصیلی وضاحت کیجیے۔